

# 17 部 構造力学と数学，歴史，失敗事例

## 02 章 シースム 照査のための構造力学

西村宣男

' 21. 02. 00

加藤久人

山口隆司

三好崇夫

第 1 回

照査のための構造力学第 1 章序論

照査のための構造力学 第 2 章 初等骨組理論と拡張骨組理論 (拡張骨組理論基礎編)

第 2 回

照査のための構造力学 (シースム 2-01) 2. 4 組み立て断面部材の換算剛性

照査のための構造力学 (シースム 2-2) 2. 6 はりのねじり

第 3 回

照査のための構造力学 (シースム 2-5) 2. 5 積層ばりの曲げ

照査のための構造力学 (シースム 2-7) 2. 7 閉断面はりの断面せん断変形 (断面変形)

照査のための構造力学 (シースム 2-8) 2. 8 弾性床上的はり

第 4 回

照査のための構造力学 (シースム 2-9) 2. 9 吊橋の膜理論

照査のための構造力学 (シースム 3) 離散的構造解析法と古典力学コラボレーション(拡張骨組力学)

第 5 回

照査のための構造力学(シースム 3-4) 2 主桁橋梁架設系の安定性

第 6 回

照査のための構造力学(シースム 3-6) 波形鋼板ウェブ PC 桁橋梁

第 7 回

照査のための構造力学(シースム 4) 応力集中の纏め方

第 8 回

照査のための構造力学(シースム 4) 応力集中

第 9 回～第 26 回

ナシ

## 第1章 概論

### 1. 1 本書の目的

### 1. 2 コンピュータ時代における構造解析

### 1. 3 設計照査と構造力学能力の開発

### 1. 4 本書の構成と読み方

## 第2章 初等骨組理論と拡張骨組理論 (拡張骨組理論基礎編)

### 2. 1 概説

### 2. 2 当て板補強された部材

### 2. 3 せん断変形の影響を考慮したはりの曲げ

### 2. 4 組み立て断面部材の換算剛性

### 2. 5 積層ばりの曲げ

### 2. 6 はりのねじり

### 2. 7 閉断面はりの断面せん断変形 (断面変形)

### 2. 8 弾性床上的はり

### 2. 9 吊橋の膜理論

## 第3章 離散的構造解析法と古典力学のコラボレーション (拡張骨組力学応用編)

### 3. 1 概説

### 3. 2 トラス桁の立体挙動と固有振動

### 3. 3 吊橋の固有振動

### 3. 4 2主桁橋梁架設系の安定性

### 3. 5 鋼逆 $\pi$ 形断面合成桁

### 3. 6 波形鋼板ウェブ PC 桁橋梁

### 3. 7 高力ボルト摩擦接合継手における板厚差の影響

## 第4章 応力集中の纏め方

## 第4章 応力集中

### 4. 1 概説

### 4. 2 応力集中問題の評価法

## 照査のための構造力学

# 第1章 概論

## 1. 1 本書の目的

本書は，高等教育機関において入門編の構造力学を学び，さらに高級設計技術者としての評価を得るため構造解析法の研鑽を目指す方々を支援する目的で編集したものである。骨組や平板の力学，薄肉構造理論についても一通りの知識を習得し，さらにコンピュータ向きのマトリックス変位法や有限要素法を学習する段階で本書を参考にして，構造力学に関する知識を階層化あるいは系統化するのに役立てて頂きたい。

従って，初めて構造力学を学ぶ人の学習意欲に対して，本書は良薬とはならず，むしろ消化不良を起こす原因になる可能性がある。そのような場合でも本書の第1章は読んでおいて欲しい。第1章では社会基盤施設の計画・設計技術の柱となる構造力学・構造解析の意義と位置付けについて述べている。

本書は，構造物の解析や設計が問題なく行われたことを保証するための設計照査能力の育成をも意図している。今日のコンピュータ時代では，多様な構造解析ソフトの出現によって，構造物に発生する変形や内力を計算することは容易である。それらのソフトに用いられている理論を熟知しなくても，使用説明書に従えば必要な情報が入手できるようにユーザーフレンドリーな形式で提供されている。汎用の構造解析ソフトを使用すれば，任意の構造形式，支持条件，荷重条件について解を求めることができるが，その解の力学的解釈について構造解析ソフトは何も与えてくれない。力学的解釈は設計技術者個人の構造力学能力に関わっている。

構造力学能力には構造物を解析するためのツールに関する知識と，個々の構造物の力学特性に関する知識とで構成されるが，力学的解釈に必要な能力は主として后者である。

例えば，以下のような解釈である。

- 1) 平行弦トラスの変位は弦材の弾性変形によるものと腹材の弾性変形によるものとに分けられるが，前者は初等はり理論の曲げ理論で，後者は曲げに伴うせん断変形として捉えることができ，両者の比率はせん断変形を考慮したはり理論によって把握することができる。
- 2) 両端において拘束されたはりに等分布ねじり荷重が作用するときのねじり角分布は，閉断面はりの場合は2次放物線となるが，開断面はりの場合は両端におけるそり拘束の影響が現れ，分布荷重と軸引張力を受ける固定ばりのたわみ分布に類似する。
- 3) 支点上曲げモーメントによって単純はりには一定のせん断力が作用するが，このせん断力による変形ははりのたわみには現れない。

このような力学特性に関する知識は，初等構造力学で教えられているはり理論の成り立つ仮定を少し踏み外した拡張はり理論（拡張骨組理論）を学ぶことによって熟成される。

## 1. 2 コンピュータ時代における構造解析

我が国においては 1960 年代から計算機を活用した構造解析法の研究が始まった。1970 年代になると実務設計において、より多様で精密な構造解析の要求が先行し、実務サイドと教育サイドにおける構造解析技術の逆転現象が生じた。その原因は産業投資に比べて教育投資は貧弱であり、直接的生産効果の見えない教育におけるコンピュータ環境の整備が遅れたことにある。教育機関におけるコンピュータ教育とそれを利用した構造解析の教育がそれなりに充実するのはパーソナルコンピュータと情報ネットワークシステムが整備された 1980 年代の中頃まで待たなければならなかった。このような背景から、教育機関における構造力学教育は必ずしも実務レベルの要求に応えることができなかつたように思われる。

現代の構造力学教育は、古典的構造力学と離散的構造解析法とに大別される。前者では、初等はり理論をベースとして一部連続体力学（弾性学）を含み、力学における規約と骨組構造物に関する基本理論とその計算法が解説される。後者では、コンピュータ利用を前提としたマトリックス変位法、有限要素法における構造解析の仕組み、データ処理法が解説されると共に、汎用構造解析ソフトを用いた構造解析の体験が課せられる。

1980 年代から、土木技術者として要求される高等教育機関における専門教育の内容が幅広くなってきた。それまでの構造工学、地盤工学、水工学などハード重視のカリキュラムから、環境学、マネジメント、などソフト系の科目が加えられ、その一方で取得単位数の削減が行われたため、ハード系の科目の割合を減少させることとなった。構造力学に関しても、前述の古典的構造力学は必要最小限に、離散的構造解析法は選択科目として、全ての学生を対象としない非主要科目とする教育機関が増えている。

このような社会情勢においても、高等教育機関は構造設計に秀でた技術者を育成する責務を担っており、構造力学教育法の改善を望む声の実務のリーダーから寄せられている。単に古典的構造力学の教育において、受講者に基本的な力学特性を確実な知識として教え込むだけでなく、このコンピュータ時代に相応しい構造力学教育法の開発が必要である。

勿論、構造設計のエキスパートにとっては、離散的構造解析法の力学的内容に関する知識を高めることも重要である。本書はそのための解説書ではないので、ここでは離散的構造解析法の教育内容として含めるべき項目に関する二三の提言に留めておく。

- 1) 応力集中現象など局所的な応力問題を効率よく計算するための高次要素の意義を理解させる。そのために有限要素解析における線形要素から高次要素（実用的には 2 次要素で十分）までの機能と限界に関する解説を行うこと。
- 2) 弾塑性現象の正しい解釈のために、塑性状態における応力とひずみに関する基本特性を理解させるような演習課題を含める。
- 3) 有限変位問題を理解させるため、演習課題として代表的有限変位問題を取り上げ、非線形計算における技法を体験させる。

## 1. 3 設計照査と構造力学能力の開発

- (1) 土木工学における構造力学の位置付け

最近, 構造力学的思考や構造解析能力は土木工学の中心から徐々に離れて行くように思える. 中心はプロジェクトマネジメントであり, 構想・法規・財務の次に構造計画とそれを支える設計技術がフォローする構成となっている.

法規や財務は, 本来, 土木工学の範疇ではなかったが, 公共財としての社会基盤施設の計画・設計・建設・維持管理に関わるのは行政の土木職が圧倒的に多く, そのような人達をサポートするために, 財務までを含めたプロジェクト経営学が堂々と土木工学の中心を歩むようになっている.

高等教育機関で土木工学を学ぶ学生達にとって発注者側や計画系の部署にポストを得ることが目標となり, 構造力学や地盤工学に卓抜した能力を習得して, 社会基盤建設の第 1 線で活躍するために必要な努力は敬遠される傾向にあるように思われる.

## (2) 設計照査の重要性

一方, 最近は公共投資の公平性, 透明性が強く求められるようになり, 受発注制度の見直しを検討され, その結果, 一般競争入札方式が採用されるケースが増えてきた. その際に, 社会基盤施設の品質保証が課題としてクローズアップされている. すなわち, 一般競争入札において安値で受注した企業が技術力不足や無責任な業務によって, 施設に要求される性能レベルを欠くような結果にならないように, 発注段階で応札企業の能力を適切に審査し, また施工の段階や完成品の納入時に適切に結果を評価することの重要性が認識されるようになってきた. 受発注段階における応札企業の評価には, 技術提案の内容, 企業経歴, 担当技術者の保有資格などが評価対象となる. さらに“結果の評価”が広い意味の設計照査である.

## (3) 設計の良否の評価

設計照査項目としては

- 1) 目的に適った構造形式, 規模, 性能であること, それらが遵法であることの照査,
- 2) 採用された設計手法が適切であることの照査,
- 3) 設計計算に誤りがないことの照査,

の 3 点に集約される. このうち 2) と 3) の項目が力学的能力に深く関わっている.

社会基盤施設の設計において, 構造解析は必須であり, また実務設計では離散的構造解析法による設計業務が大半である. そこで重要視したいのは, 離散的構造解析法によって得られた構造物の応答値の力学的解釈の方法論である. 離散的構造解析法による計算結果が正しいことを確認するためには尺度が必要である. 尺度とは基本的構造の理想的な境界条件や荷重条件の下での基本的な応答値であり, 実際の複雑な構造物の状態を単純化・理想化することで, 尺度との比較により解析結果の妥当性を確認したり説明したりする.

従って土木技術者で構造設計のエキスパートを目指すなら, できるだけ豊富な尺度を習得しておくことが大切である. 本書で説明する拡張はり理論 (拡張骨組理論) はこの尺度を増やすために有効である. 単に初等力学で記述された基本的力学特性の守備範囲を増やすだけでなく, 現象を支配している力学パラメータを提示し, 力学特性とパラメータの関

係を与えることによって、理解をより深めることが可能となる。

#### (4) 設計照査システムの改善に向けて

行政の技術者が社会基盤施設の設計・施工についても指導的立場であった50年前まで、多分、設計照査は行政の設計責任者が行っていたに違いない。

現在でも少数の行政技術者に、そのような立場にあることを由とする方を見掛けることがあるが、発注者側として高圧的な姿勢が勝つためか、受注者側からは大方は歓迎されていないようである。今日ではプロジェクトを推進しようとするとき、行政担当者は、関係する省庁・地方自治体などとの折衝、地元住民・権益者に対する説明や補償交渉など、技術以外の多くの仕事を抱えるようになっており、純粋な技術的業務はコンサルタントや施工会社の技術者に委ねる部分が増えている。その分、行政担当者の技術力が低下してきているのは致し方ないと思われる。

社会基盤施設の品質を高水準に保つために、このような状況に適合した設計照査システムを構築することが重要である。先に挙げた設計照査のポイントを押さえた設計照査システムの構築を目指して、現状の設計照査システムの問題点と改善策について述べる。

#### 発注者—受注者間協議

設計業務が発注された場合、先ず発注者と受注者間の協議（発注時協議）が行われる。そこでは設計条件、現地の既設施設に対する影響の条件などが発注者から受注者に対して示される。設計業務が進行し成果品（設計書・設計図）が出来上がった段階で、再び発注者—受注者間協議が行われ、設計条件が満たされていることの照査、設計上の課題に対する回答の照査、経済性の評価が行われる。多くの場合、経済性の評価に重点が置かれ、力学的な設計照査はこの段階では等閑にされる傾向にある。

#### 受注者における内部照査

受注した構造物の設計業務において、与えられた設計条件、現地の立地条件が確定すると、作用荷重の評価、構造物のモデル化、解析方法の選択、解析実行、構造寸法の決定、建設工法の選択と進み、最後に経済性の評価を行う。この範囲が構造力学能力を要求される業務である。コンピュータ時代の構造設計においては殆どの場合、離散的構造解析法が用いられるから、解析の中味を精査することは不可能に近い。そこで設計会社では各受注案件に対して設計担当技術者と共に照査担当技術者を定める内部照査制度を導入している。照査担当技術者には設計経験の豊富なベテラン技術者が担当する。しかしこのような制度はあくまで受注会社内部における照査であり、成果品の品質保証に対する公的承認とは言い難い。

現状の設計照査システムが発注者—受注者間協議と受注者による内部照査の組み合わせで行われており、それぞれの照査に欠点が内蔵されていることを考えると、照査システムの枠組みについて抜本的な改革が必要であると思われる。

#### 第3者照査機関

改革された設計照査システムの中心を第3者照査機関が担う。第3者照査機関が具備すべき機能の第一は、技術革新に対応できる照査能力を有することである。発注方式の改革により、総合評価方式などが取り入れられ、応募者によるVE提案が増えた段階で、新技

術や要求性能の変化に対して適確に対応できる能力が照査技術者にも求められる。

そのため第3者照査機関に属する照査技術者は、発注機関の技術者と同等の社会基盤建設に対する責務を持つと共に、構造設計に対する持続的な経験に裏打ちされた高い技術的識見と構造力学能力を有していなければならない。行政は第3者照査機関並びにそこで業務を遂行する人材の育成に対して責任を負う。

## 1. 4 本書の構成と読み方

### (1) 本書の構成

本書では、第2章において、数多くの拡張骨組理論について初等構造力学との関連、現象を支配する力学パラメータを紹介し、続いて第3章においてコンピュータを利用したマトリックス変位法や有限要素解析（離散的構造解析法）によって求められた構造物の応答結果を、拡張骨組理論によって力学的に解釈できる多くの事例を紹介する。さらに拡張骨組理論では解釈しがたい、応力集中現象（第4章）や格点部における局部的板曲げ問題（第5章）は別途に章を設け、知識の系統的な整理ができるように工夫した。

### (2) 本書の読み方

本書によって著者の主張する拡張骨組理論を理解し実務設計における現象の解釈に役立てたり、設計照査技術として活用できる能力を獲得するためには、以下に述べるような系統的な学習を勧める。

- ・ 拡張骨組理論は微分方程式で記述された弾性方程式を境界値問題として解くことが基本となっている。そこで本書で登場する各種の微分方程式とその一般解を付録に纏めておいたので、数学の参考書と照らし合わせて解の求め方を理解しておくこと。
- ・ 拡張骨組理論の基礎編である第2章により概要を把握した後、応用編の第3章により拡張骨組理論の活用の仕方を理解して欲しい。力学全体の流れに対して個々の理論の位置づけを確認することが大切である。
- ・ 新しい力学問題に遭遇する際に、是非拡張骨組理論による力学現象の解釈に挑戦して欲しい。
- ・ 拡張骨組理論を上手く活用できない場合、著者に問い合わせを欲しい。無料で相談に乗ります。拡張骨組理論を活用した構造設計技術の高度化に貢献できれば本望であるし、構造設計の品質保証に志を有する方々とネットワークを築きたいと思っている。

連絡先 〒533-0023

大阪市東淀川区東淡路1-5-4-409 西村宣男

メールアドレス n.nslmura@gaia.conet.ne.jp

照査のための構造力学 第 2 章

第 2 章 初等骨組理論と拡張骨組理論（拡張骨組理論基礎編）

2. 1 概説

本書では，初等構造力学の中で骨組構造に関する力学を初等骨組理論と称している．初等骨組理論の特長としては，①煩雑な計算を避けるために種々の仮定を設けて，可能な限り単純化した理論，②初心者にも理解し易いように簡単な数学によって解に到達できる，③専ら手計算によって解に到達できる．④実構造に対してもそれなりの精度で解を与える，などを挙げることができる．前コンピュータ時代においては①の特長を活かして多変位自由度の構造物を対象とした数値計算を如何に誤差なく効率的に実行するかに腐心した．吊橋に代表されるように手計算では対応できない巨大構造については，連続体置換法が用いられた．

コンピュータの発達した現在では，構造物の変位自由度が大きいことは構造解析のハードルにはならないので，初等骨組理論の意義は再考する必要がある．初等骨組理論は，①基本的力学現象の理解の助けとなる．②コンピュータの利用を前提とした離散的構造解析法（マトリックス変位法，有限要素法など）による計算結果の力学的解釈に活用できる．

②の目的に対して初等骨組理論では十分な効力を発揮できない．初等理論が立脚している力学的仮定が実構造物では必ずしも成立しているとは言い難いからである．そこで初等骨組理論の成立条件となっている仮定を解放し，あるいは初等構造力学では詳しくは論じられていない問題も含めて，適用範囲を広げたものを拡張骨組理論と称することにする．

本章では，拡張骨組理論を分かり易く説明するために，基礎方程式の誘導過程における初等骨組理論との相違点を説明する．また多くの場合，現象に関与する力学パラメータを見出すことができる．この力学パラメータを尺度として，初等理論と拡張理論の関係を理解することにより知識を普遍化することができる．

拡張骨組理論は，いわゆる 1 次元化理論に属する．1 次元化理論とは，断面内の参照点における力学量で断面諸量や変位，断面力を代表し，力学問題を一般に 1 次元の微分方程式で記述する理論である．ここで拡張骨組理論に関する知識を体系化するために，骨組を対象とした初等理論から拡張理論への展

表 2-1 拡張骨組理論に用いる 1 次元化理論

節番号	力学現象	微分方程式	変数
2. 2	当て板補強	$q'' - \alpha^2 q = F$	伝達せん断流 $q$
2. 3	せん断を考慮した曲げ	$v^{(4)} = p - cp''$	たわみ $v$
2. 6	はりのねじり	$\phi^{(4)} - \alpha\phi'' = T$	ねじれ角 $\phi$
2. 7	閉断面ばりの断面変形	$\theta^{(4)} - r^2\theta'' + s^4\theta = m_\theta - cm_\theta''$	断面変形角 $\theta$
2. 8	弾性床上のはりの曲げ	$v^{(4)} + s^4v = p$	たわみ $v$
2. 9	吊橋の鉛直たわみ	$v^{(4)} - \alpha^2v'' = p - CH_p$	鉛直たわみ $v$
	吊橋の水平たわみ	$w_s^{(4)} - \alpha^2w_c'' + cw_s - cw_c = p$	水平たわみ $w_s, w_c$
	吊橋のねじれ	$\phi^{(4)} - \alpha^2\phi'' = m_t - CH_p$	ねじれ角 $\phi$

開に際して, 考慮する変位などの情報を表 2-1 に整理して掲げる. 表中のゴシックは本書で取り上げた拡張骨組理論を表している

## 2. 1 当て板補強された部材

### (1) 当て板補強材された部材の力学問題

近年, 損傷劣化した鋼構造部材に当て板補強を施して構造物の延命を図る工事が行われている. 以前は当て板の接合にはリベット, 高力ボルトあるいは溶接が用いられてきたが, 最近では接着剤等で新素材である FRP 製の補強板を貼付する例が増えている. 本稿では基本的な引張部材, 曲げ部材に当て板補強を行う場合の母材から当て板に流れる伝達せん断流の分布を計算するのに用いる 1 次元化理論と伝達せん断流分布特性について述べる.

### (2) 引張部材の当て板補強

#### 1) 基礎微分方程式

単独の引張材の軸方向変位  $u$  に関する弾性方程式は 2 階の微分方程式で記述される. これに対して, 2 枚の板を貼り合わせた引張材の軸方向変位に関する弾性方程式は 4 階の微分方程式となるが, 板間の伝達力で表現すると 2 階の微分方程式で記述できることを示すとともに, 代表的な適用例に関する力学特性について説明する.

初等骨組理論で説明される引張材の弾性方程式は次のように誘導される.

1 次元の変位とひずみの関係より,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{N}{EA} \quad (1)$$

ここに,  $\varepsilon$ : 軸方向ひずみ,  $u$ : 軸方向変位,  $N$ : 軸力,  $EA$ : 伸び剛性.

軸力と分布外力の関係より,

$$\frac{dN}{dx} = -f \quad (2)$$

ここに,  $f$ : 軸方向分布外力.

式(1), (2)より軸力  $N$  を消去すると,

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} = -f \quad (3)$$

となり, 引張材の弾性方程式は変位  $u$  に関する 2 階の微分方程式で記述される.

次に, 図 2-1 に示すように母材に補強材を貼付した場合を考える. 母材および補強材のひずみと変位の関係はそれぞれ,

$$\varepsilon_0 = \frac{du_0}{dx} = \frac{N_0}{E_0 A_0} \quad (4)$$

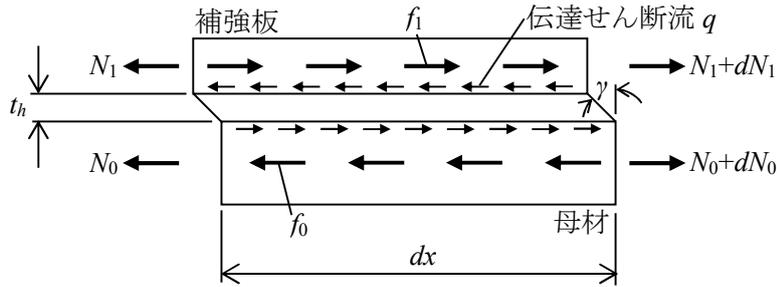


図 2-1 当て板補強の一次元化モデル

$$\varepsilon_1 = \frac{du_1}{dx} = \frac{N_1}{E_1 A_1} \quad (5)$$

ここに,  $E_0 A_0$ ,  $E_1 A_1$ : 母材および補強材の伸び剛性を表す.

軸力と分布外力および母材と補強材間の分布伝達力  $q$  の関係より,

$$\frac{dN_0}{dx} = -f_0 + q \quad (6)$$

$$\frac{dN_1}{dx} = -f_1 - q \quad (7)$$

厚さ  $t_h$  の接着層にせん断ひずみ  $\gamma$  が生じているとすると,

$$u_0 - u_1 = \gamma t_h = \frac{q t_h}{Gb} \quad (8)$$

ここに,  $b$ : 母材および補強材の板幅である.

式(8)の両辺を微分し, 式(4)および(5)を代入すると,

$$\frac{N_0}{E_0 A_0} - \frac{N_1}{E_1 A_1} = \frac{dq}{dx} \frac{t_h}{Gb} \quad (9)$$

さらに両辺を微分すると

$$\frac{1}{E_0 A_0} \frac{dN_0}{dx} - \frac{1}{E_1 A_1} \frac{dN_1}{dx} = \frac{d^2 q}{dx^2} \frac{t_h}{Gb} \quad (10)$$

式(10)に式(6)および(7)を代入して整理すると

$$\frac{d^2 q}{dx^2} - \alpha^2 q = \frac{Gb}{t_h} \left( \frac{f_0}{E_0 A_0} + \frac{f_1}{E_1 A_1} \right) \quad (11)$$

ここに,  $\alpha^2 = \frac{Gb}{t_h} \frac{E_0 A_0 + E_1 A_1}{E_0 A_0 E_1 A_1}$ .

弾性方程式は伝達力  $q$  に関する 2 階の微分方程式で表される. 式(10)を変位  $u_0$  ないしは  $u_1$  で表示すると 4 階の微分方程式となる. 弾性方程式 (11) の特性値  $\alpha$  に代表長さ  $L$  を乗じた  $\alpha L$  はこの問題の力学パラメータで, 補強材の効果などは  $\alpha L$  を尺度として把握すると良い.

分布荷重が作用していない場合, 式(11)の解は以下のように与えられる.

$$q = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x \quad (12)$$

ここに,  $C_1$  および  $C_2$ : 積分定数で, 境界条件によって決定される.

## 2) 典型的例題の閉じた解

### ① 例題 1: 当て板補強

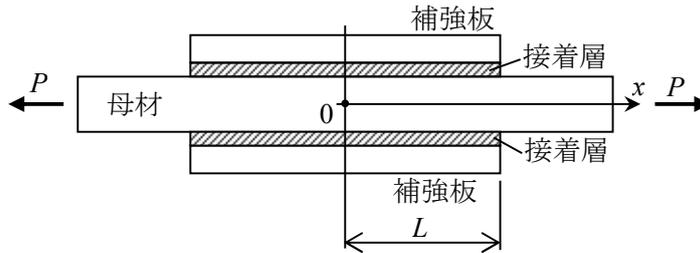


図 2-2 引張を受ける当て板補強

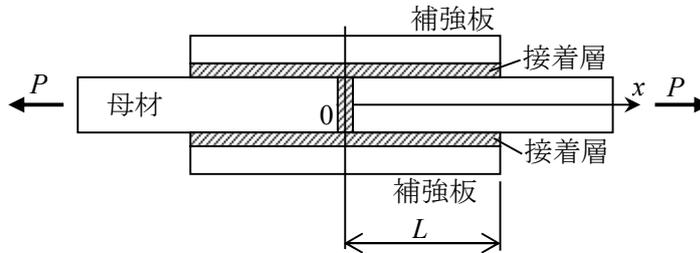


図 2-3 引張を受けるラップ継手

図 2-2 に示すように母材の中央部に当て板補強した部材に一定軸力  $P$  が作用している. 対称性より中央断面 ( $x=0$ ) で軸方向変位を拘束すると, 境界条件は

$$x=0: u_0=0, \quad u_1=0$$

$$x=L: N_0=P, \quad N_1=0$$

式(8)より  $q(0)=0$ , 即ち  $C_1=0$ .

式(9)より,

$$\frac{P}{E_0 A_0} = \frac{dq(L)}{dx} \frac{t_h}{Gb}$$

式(12)を 1 階微分して,

$$\frac{dq}{dx} = \alpha C_1 \sinh \alpha x + \alpha C_2 \cosh \alpha x$$

より,

$$C_2 = \frac{GbP}{\alpha E_0 A_0 t_h} \cdot \frac{1}{\cos \alpha L}$$

したがって, 伝達力  $q$  の解は以下のように表される.

$$q = \frac{GbP}{\alpha E_0 A_0 t_h} \cdot \frac{\sinh \alpha x}{\cosh \alpha L} \quad (13)$$

当て板に伝達される軸力は伝達せん断流  $q$  を積分することにより

$$N_1 = \frac{GbP}{\alpha^2 E_0 A_0 t_h} \left( 1 - \frac{\cosh \alpha x}{\cosh \alpha L} \right)$$

初等構造力学では, 当て板が分担する軸力  $N_{10}$  は母材との剛性比によって

$$N_{10} = \frac{E_1 A_1}{E_0 A_0 + E_1 A_1} P$$

と与えられる.  $N_1$  を  $N_{10}$  で除して無次元表示すると

$$\frac{N_1}{N_{10}} = 1 - \frac{\cosh \alpha x}{\cosh \alpha L} \quad (14)$$

## ② 例題 2: ラップ継手

図 2-3 に示すように, 突き合わせた板を連結板によってラップ接合する場合, 継手の右側に着目して, 境界条件を以下のように設定する.

$$x=0: u_1=0, \quad N_0=0$$

$$x=L: N_0=P, \quad N_1=0$$

式(9)より

$$-\frac{P}{E_1 A_1} = \frac{dq(0)}{dx} \cdot \frac{t_h}{Gb} \quad (15)$$

$$\frac{P}{E_0 A_0} = \frac{dq(L)}{dx} \cdot \frac{t_h}{Gb} \quad (16)$$

式(12)を1階微分して,

$$\frac{dq}{dx} = \alpha C_1 \sinh \alpha x + \alpha C_2 \cosh \alpha x$$

と表されるから, 式(15)および(16)に代入すると, 積分定数  $C_1$  および  $C_2$  は

$$C_1 = \frac{GbP}{\alpha t_h} \frac{1}{\sinh \alpha L} \left( \frac{1}{E_0 A_0} + \frac{\cosh \alpha L}{E_1 A_1} \right)$$

$$C_2 = -\frac{GbP}{E_1 A_1 \alpha t_h}$$

したがって, 伝達力  $q$  の解は以下ようになる.

$$q = \frac{GbP}{E_1 A_1 \alpha t_h} \left\{ \left( \frac{E_1 A_1}{E_0 A_0} + \cosh \alpha L \right) \frac{\cosh \alpha x}{\sinh \alpha L} - \sinh \alpha x \right\} \quad (17)$$

[構造特性に関する考察]

上記2つの例題について構造的特性を論ずる前に, 力学パラメータ  $\alpha L$  の物理的意味を説明しておく.

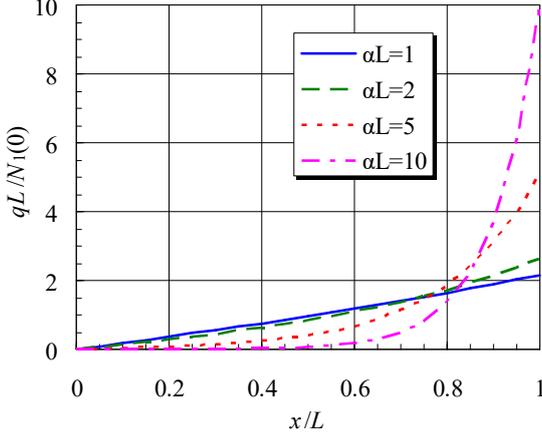
$\alpha L$  を分解すると

$$\begin{aligned} (\alpha L)^2 &= \frac{Gb}{t_h} \frac{E_0 A_0 + E_1 A_1}{E_0 A_0 E_1 A_1} L^2 \\ &= \frac{Gb}{t_h} \frac{L^2}{E_1 A_1} \left( 1 + \frac{E_1 A_1}{E_0 A_0} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

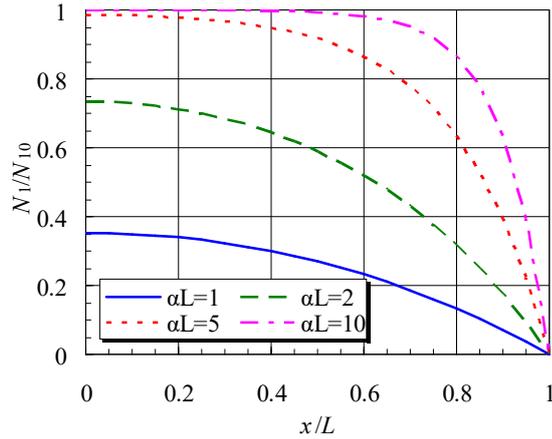
接着層のせん断剛性と当て板の伸び剛性に関する量と母材・当て板の剛比の積で表されることが分かる.

一例として厚さ 10mm, 幅 100mm の鋼板の両面に厚さ 2mm, 幅 100mm の高弾性系の炭素繊維補強板をエポキシ樹脂系接着剤で貼り付けた場合を想定する. 接着層厚は 0.2mm, 鋼および炭素繊維補強板の弾性係数をそれぞれ 20,500kN/mm<sup>2</sup> および 49,000kN/mm<sup>2</sup>, 接着剤のせん断弾性係数を 98kN/mm<sup>2</sup> とすると, 補強区間長 2L に対して  $\alpha L$  は表 2-2 に示す値となる.

00節



(1) 伝達せん断流分布



(2) 当て板の軸力分布

図2-4 当て板補強における伝達せん断流と軸力分布

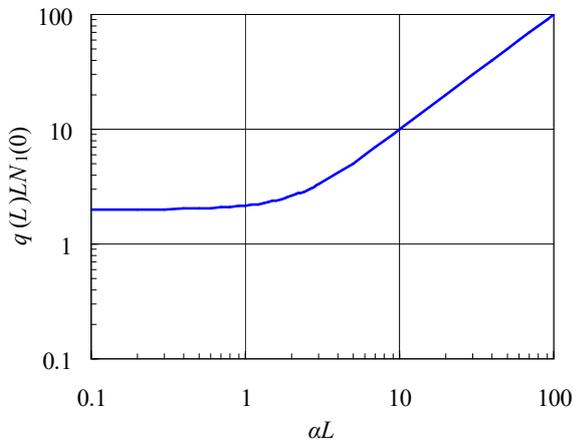


図2-5 当て板補強先端の伝達せん断流最大値

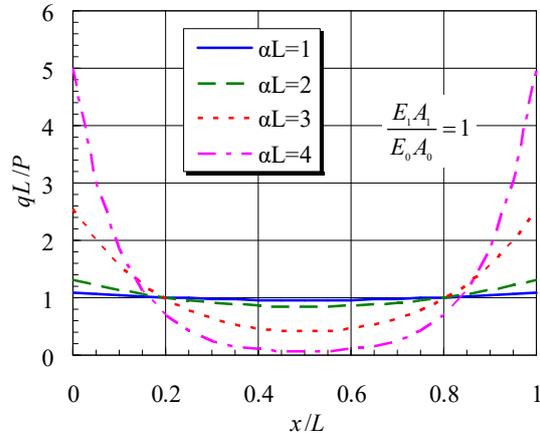


図2-6 ラップ継手の伝達せん断流分布

例題1について、伝達せん断流  $q$  および当て板の軸力分布を図2-4に示す。伝達せん断流は当て板中央断面の軸力が補強区間長  $L$  にわたり一様に伝達すると仮定した場合のせん断流  $N_{10}(0)/L$  で除して表示している。軸力は式(14)の無次元量で表示している。

伝達せん断流  $q$  は  $\alpha L$  が一定量より大きくなると補強区間の先端 ( $x=L$ ) 付近において集中的に大きくなり当て板の分担軸力は初等構造力学で計算される分担軸力  $N_{10}$  に達する。中央断面 ( $x=0$ ) における当て板の軸力  $N_1/N_{10}$  と  $\alpha L$  の関係は図2-5の関係であり、 $\alpha L$  が5より小さいと計画した当て板による補強効果が著しく減少することが理解できるであろう。

例題2について伝達せん断力の分布を図2-6に示す。ただし、ここでは、 $E_0A_0=E_1A_1$  としている。母材は中央において繋がっていないので軸力は接着層を通じて中央では全てが当て板によって分担される。従ってこの問題では伝達せん断力の分布形状が問題となる。伝達せん断流は補強区間の先端と中央の2カ所に集中する。図2-6に示した伝達せん断流は伝達される軸力  $P$  が補強区間長  $L$  にわたり一様に分布するとした場合のせん断流  $P/L$  で除して表示している。継手の先端および中央断面における伝達せん断流の最大値が例題1の半分であることは興味深い。

表2-2 補強区間長とパラメータ  $\alpha L$  の関係

補強区間長 $2L$ (cm)	10	20	40	100	200
パラメータ $\alpha L$	4.3	8.6	17.2	43.0	86.0

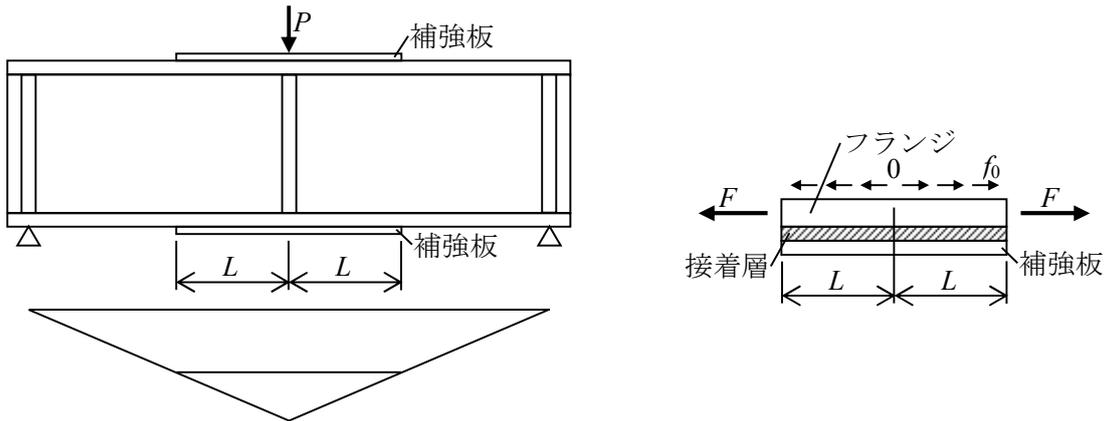


図 2-7 曲げを受けるはりフランジの当て板補強

例題 2 における伝達せん断流  $q$  の分布は高力ボルト摩擦接合継手でボルト列数が多い場合（多列ボルト）の摩擦面における伝達せん断流分布の考察に活用することができる。高力ボルト摩擦接合継手では図 2-1 に示したような接着層は存在しないが、母材の軸方向応力が連結板の軸方向応力として移行する途中はせん断応力として伝達し、母材および連結板にせん断変形が生ずるので接着層に似た挙動が観察される。伝達力  $q$  はあくまで弾性状態に関するもので、母材や連結板に降伏域が発生したり、母材と連結板間の局部的なずれが発生したりすると、 $q$  の分布形は変化する。

接着層が粘りのない接着剤であれば、伝達力  $q$  の大きい継手端部あるいは中央で発生した亀裂は界面に沿って脆性的に伝播し破壊に到る。機械的接合である高力ボルト摩擦接合の場合、継手端部あるいは中央のボルト位置で限界に達しても直ちに全すべりに到るわけではなく、伝達力の再配分によりすべりに対して余裕のある部分の伝達力が増加し各ボルト位置での伝達力分布が平均化された後に全すべりが生ずる<sup>1)</sup>。

### (3) 曲げ部材の当て板補強

#### 1) モデルの設定

図 2-7 に示すように単純支持された I 形断面ばりの上下フランジを部分的に当て板補強する場合、引張フランジと当て板の間の伝達せん断流分布について考える。ここでは問題を単純化してフランジの中立面と当て板の中立面ははりの図心から等距離にあると仮定する。このようなモデル化によって弾性方程式は式(11)を適用することができる。

補強区間の両端に軸力が作用する場合と異なり、分布外力  $f_0$  ないし  $f_1$  は 0 ではない。いま、添え字 0 を付けた断面をフランジ、添え字 1 を付けた断面を当て板とすると、 $f_1$  は 0 であるが  $f_0$  はフランジとウェブの接合点におけるはりの曲げモーメントの勾配（せん断力）に起因するせん断流である。

補強区間の外側の曲げモーメントによるフランジ力は前項の軸力による解が適用できる。補強区間で曲げモーメントが変化する場合、すなわちせん断力が存在する場合のフランジと当て板間の伝達せん断流は式(11)を用いて別途誘導する必要がある。

#### 2) 典型的例題の閉じた解

上記の部分補剛されたはりの中央に集中荷重が作用する場合を考える。初等はり理論によるウェブからフランジに伝わるせん断流は

$$f_0 = \frac{bt_f P}{2bt_f H + t_w H^2 / 3} \quad (17)$$

ここに， $b$ ：フランジ幅， $t_f$ ：フランジ厚， $t_w$ ：ウェブ厚， $H$ ：フランジ間距離， $P$ ：集中荷重。  
式(11)の解は

$$q = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + \frac{K}{\alpha^2} \left\{ 1 - \frac{\sinh \alpha(L-x) + \sinh \alpha x}{\sinh \alpha L} \right\} \quad (18)$$

ここに， $K = \frac{f_0 G b}{E_0 A_0 t_h}$ ， $L$ ：補強区間の 1/2。

境界条件：  
 $x=0$ ： $u_0 = u_1 = 0$  即ち  $q=0$   
 $x=L$ ： $N_0 = N_1 = 0$  即ち  $dq/dx=0$

を適用して積分定数を求めると，フランジから当て板への伝達せん断流  $q$  を以下のように表すことができる。

$$q = \frac{K G b}{t_h \alpha^2} \left\{ 1 - \frac{\sinh \alpha(L-x) \cosh \alpha L + \sinh \alpha x}{\sinh \alpha L \cosh \alpha L} \right\} \quad (19)$$

分布外力  $f_0$  で除して無次元表示すると

$$\frac{q}{f_0} = \frac{E_1 A_1}{E_0 A_0 + E_1 A_1} \left\{ 1 - \frac{\sinh \alpha(L-x) \cosh \alpha L + \sinh \alpha x}{\sinh \alpha L \cosh \alpha L} \right\} \quad (20)$$

補強板の軸力は  $f_0 L$  で除して無次元表示すると

$$\frac{N_1}{f_0 L} = \frac{E_1 A_1}{E_0 A_0 + E_1 A_1} \left\{ 1 - \frac{x}{L} + \frac{\cosh \alpha x - \cosh \alpha(L-x) \cosh \alpha L}{\alpha L \sinh \alpha L \cosh \alpha L} \right\}$$

はり中央断面における当て板の軸力は

$$\frac{N_1(0)}{f_0 L} = \frac{E_1 A_1}{E_0 A_0 + E_1 A_1} \left( 1 - \frac{\sinh \alpha L}{\alpha L \cosh \alpha L} \right) \quad (21)$$

[構造特性に関する考察]

図 2-7 の荷重状態における下フランジの等分布外力によるフランジと補強板間の伝達せん断流および補強板の軸力分担について考察する。ここではフランジと補強板の伸び剛性が等しい場合

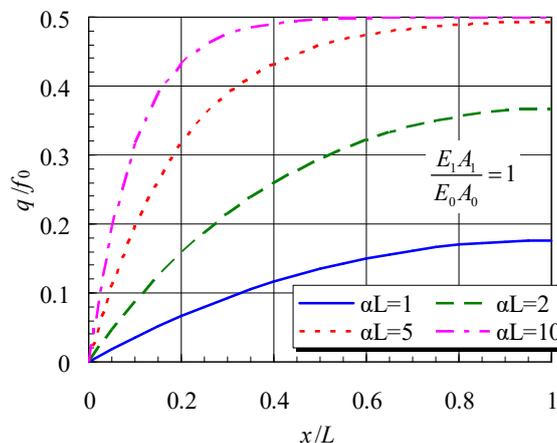


図 2-8 等分布外力による伝達せん断流の分布

( $E_0A_0=E_1A_1$ ) を想定している。

図 2-8 は分布外力で除した伝達せん断流の分布を示している。 $\alpha L$  が大きくなると、この値は支間の中央付近を除いて 0.5 に収束している。フランジと補強板の剛性が等しいとしているので、分布外力の半分を補強板が分担することを示している。 $\alpha L$  が 5 より小さくなるとフランジから補強板への伝達せん断流が小さくなり、補強効果が十分に発揮されないようになる。

図 2-2 あるいは図 2-3 の荷重状態で観察された伝達せん断力の集中は、分布外力については生じていない。ただ、はりフランジを部分的に補強する場合は補強部分の外側の曲げに起因するフランジ力に対して前述のような伝達せん断流の集中現象が存在することに留意する必要がある。

## 2. 3 せん断変形の影響を考慮したはりの曲げ

### (1) せん断変形の重要性

曲げに伴うはりのせん断変形の影響については多くの構造力学の教科書でも扱われているが、記述はごく簡単に済まされている。実構造の解析において迂闊にせん断変形を省略した初等構造力学を適用したり、せん断変形の特性を十分理解できていないために、誤った計算結果が構造設計に反映された例は少なくない。この節では、実務設計においてこの知識を的確に活用できるように理論の誘導過程、力学パラメータを示すと共に、多くの応用例を説明する。

### (2) 基礎微分方程式

はりの曲げ問題に関係する変位自由度はたわみと断面の回転角である。曲げに伴うせん断変形を考慮しても変位自由度が変わることはない。ここで言う断面の回転角とは部材軸に垂直な断面が曲げ変形によって  $z$  軸回りに回転する量である。せん断変形が無視できる場合には断面の回転角はたわみ角に等しくなる。

せん断変形を考慮する場合、たわみ角は断面の回転角  $\theta$  と断面の平均せん断ひずみ  $\gamma$  の和として

$$\frac{dv}{dx} = \theta + \gamma \quad (1)$$

と表される。曲げモーメント  $M$  は回転角の変化量に関して

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx} \quad (2)$$

式(1)の関係をを用いると、

$$M = -EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{d\gamma}{dx} \right) \quad (3)$$

断面内の平均せん断ひずみを

$$\gamma = \frac{\kappa Q}{GA}$$

と表すと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\kappa}{GA} \frac{dQ}{dx} = -\frac{\kappa}{GA} p \quad (4)$$

断面力と外力との関係

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p$$

に代入すると, せん断変形を考慮したはりの曲げ弾性方程式が与えられる.

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = p - \frac{\kappa EI}{GA} \frac{d^2p}{dx^2} \quad (5)$$

せん断変形を無視できる場合は式(5)の右辺第2項が省略できて, 初等構造力学で習うはりの弾性方程式となる. はりの曲げ問題はせん断変形を考慮するか否かに拘わらず2変位自由度の現象であり, 基礎方程式は4階の微分方程式で記述される.

断面内のせん断ひずみ分布, 即ち断面形状に関する定数  $\kappa$  はひずみエネルギーから定義するとよい.

$$\kappa = \int_A \frac{K(y)^2}{A} dA \quad (6)$$

ここに,  $K(y)$ : 断面内のせん断応力分布関数,  $A$ : 断面積.

因みに, 代表的断面形の定数  $\kappa$  は以下の通りである.

- ① 長方形断面  $\kappa=1.2$ , ② 円形断面  $\kappa=10/9$ , ③ I形断面・箱形断面  $\kappa=A/A_w$ .

### (3) 基本問題の解

せん断変形を考慮したはりの曲げに関する弾性方程式(5)の解を基本的なはりについて求めてみよう. 全ての解ははりの曲げ剛性, せん断剛性および代表長さからなる力学パラメータ  $\lambda_s$  を含んで無次元表示される. この力学パラメータはせん断パラメータと称し, はりの曲げ問題におけるせん断変形の影響を検討する際の尺度となる.

#### 1) 等分布荷重を受ける単純はり

等分布荷重の導関数は0だから, 式(5)の解は

$$v = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + \frac{px^4}{24EI} \quad (7)$$

$$\text{境界条件 } x=0: \quad v=0, \quad M = -EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{p\kappa}{GA} \right)$$

$$x=L: \quad v=0, \quad M = -EI \left( \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{p\kappa}{GA} \right)$$

より積分定数を求めると,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{pL^3}{24EI} + \frac{\kappa pL}{2GA}, \quad C_3 = -\frac{\kappa p}{2GA}, \quad C_4 = -\frac{pL}{12EI}$$

従ってたわみ曲線は

$$v = \frac{pL^4}{24EI} \frac{x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \left\{ 1 + \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 12\lambda_s \right\} \quad (8)$$

ここに, せん断パラメータ:  $\lambda_s = \frac{\kappa EI}{GAL^2}$

## 2) 集中荷重を受ける単純ばり

この問題でははりの支間に荷重が作用していないので, 弾性方程式の解は

$$v = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \quad (9)$$

境界条件として

$$x=0 : v=0, \quad M_0 = -EI(d^2v/dx^2)=0$$

対称条件として

$$x=L/2 : \theta=0, \quad Q=P/2$$

より積分定数を求めると,

$$C_1=0, \quad C_2 = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{P}{2GA}, \quad C_3=0, \quad C_4 = -\frac{P}{12EI}$$

たわみ曲線は

$$v = \frac{PL^3}{48EI} \frac{x}{L} \left\{ 3 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 24\lambda_s \right\} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{L}{2}\right) \quad (10)$$

## 3) 支点モーメント $M_0$ を受ける単純ばり

この問題でははりの支間に荷重が作用していないので, 弾性方程式の解は

$$v = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

境界条件として

$$x=0 : v=0, \quad M_0 = -EI \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$x=L : v=0, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = 0$$

より積分定数を求めると,

$$C_1=0, \quad C_2 = \frac{M_0L}{3EI}, \quad C_3 = -\frac{M_0}{2EI}, \quad C_4 = \frac{M_0}{6EIL}$$

たわみ曲線は

$$v = \frac{M_0 L^2}{6EI} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(2 - \frac{x}{L}\right) \quad (11)$$

となり, これはせん断変形を無視した場合のたわみ曲線と同一である. しかしはりにはせん断力が作用しており, せん断ひずみが生じている. この荷重状態でははりの全長にわたり一定のせん断ひずみが生じており, 図 2-9 に示すようにはりは右側にスウェイする.

この例題は次のせん断変形を考慮した 3 連モーメント公式を誘導する際に役立つ.

4) 集中荷重を受ける 1 端固定・他端ヒンジのはり

この問題も境界値問題として積分定数を求め, たわみ曲線の方程式を決定できるが, ここでは前 2 項の結果を利用して簡単にたわみ曲線を決定する方法を採用する.

この問題は支間中央に集中荷重  $P$  が作用する単純ばりと左側支点に集中モーメント  $M_A$  を受ける単純ばりの組み合わせで表現できる. 支点モーメントは固定端における変位の適合条件によって決定される. 固定端では回転角  $\theta_A$  が拘束されている. 集中荷重  $P$  および支点モーメント  $M_A$  による単純ばりの左側支点における回転角はそれぞれ

$$\theta_{A1} = \frac{PL^3}{16EI}, \quad \theta_{A2} = \frac{M_A L}{3EI} + \frac{\kappa M_A}{GAL}$$

と表されるから, 変位の適合条件により

$$M_A = -\frac{3}{1+3\lambda_s} \frac{PL}{16} \quad (12)$$

たわみ曲線は式(10)および(11)により

$$v = \frac{PL^3}{96EI} \xi \left\{ 6 - 8\xi^2 + 48\lambda_s - 3 \frac{(1-\xi)(2-\xi)}{1+3\lambda_s} \right\} \quad \left( 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \right) \quad (13)$$

$$v = \frac{PL^3}{96EI} (1-\xi) \left\{ 6 - 8(1-\xi)^2 + 48\lambda_s - \frac{3\xi(2-\xi)}{1+3\lambda_s} \right\} \quad \left( \frac{L}{2} \leq x \leq L \right) \quad (14)$$

ここに,  $\xi = x/L$

[構造特性に関する考察]

以上で示した例題からも分かるように, 静定構造ではせん断変形の影響はたわみや回転角に影響を与えるけれど, 断面力には影響を及ぼさない. 不静定構造では不静定力の計算に変位の適合条件を用いなければならないので, せん断変形の影響は変位のみならず断面力にも及ぶ. はり構造におけるせん断変

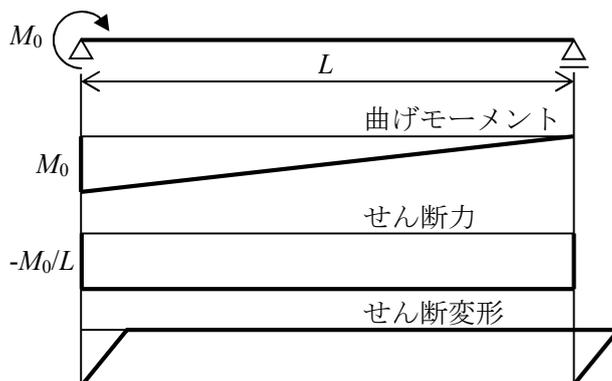


図 2-9 支点モーメントによるせん断変形

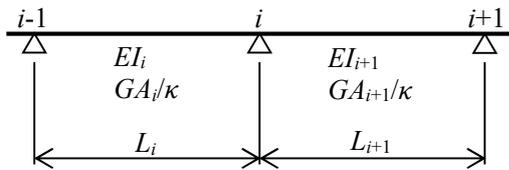


図 2-1-1 連続ばりの諸元

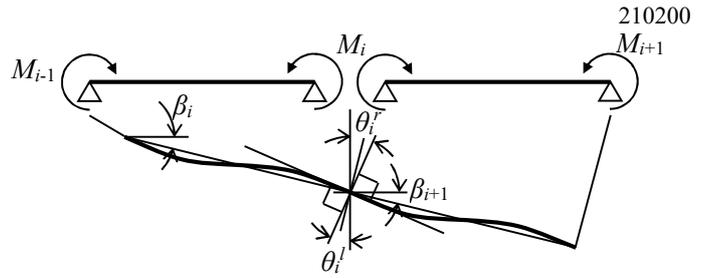


図 2-1-2 中間支点の変形量

形の影響を評価する際には，せん断パラメータを尺度としてせん断変形の影響度を把握しておくといよい。例題 4) について固定端の曲げモーメントおよびスパン中央のたわみ量をせん断パラメータに対して図示する。横座標を対数で表した図 2-1-0 よりせん断変形の影響が顕著に現れるパラメータ  $\lambda_s$  は変位についてはおよそ  $10^{-3}$ ，断面力については  $10^{-2}$  であることが分かる。

(4) 多自由度構造への展開

1) 3 連モーメント公式の誘導

初等構造力学で説明されるクラペイロンの 3 連モーメント公式は，図 2-1-1 に示す連続する 2 径間の中間支点  $i$  におけるたわみ角の適合条件から決まる 3 支点の曲げモーメント  $M_{i-1}$ ， $M_i$ ， $M_{i+1}$  に関する条件式である。曲げに伴うせん断変形を考慮した 3 連モーメント公式は，中間支点における変位の適合条件として，たわみ角に替わり回転角に着目する。せん断変形を考慮すると中間支点におけるたわみ角の連続性は成立しないからである。

図 2-1-2 において中間支点  $i$  の近傍における回転角を求める。支点  $i$  の左側近傍において

$$\theta_i^l = -\frac{M_{i-1}L_i}{6EI_i} - \frac{M_iL_i}{3EI_i} + \frac{\kappa_i}{GA_i} \frac{M_{i-1} - M_i}{L_i} + \beta_i + \theta_{i0}^l \tag{15}$$

同様に，支点  $i$  の右側近傍において

$$\theta_i^r = \frac{M_iL_{i+1}}{3EI_{i+1}} + \frac{M_{i+1}L_{i+1}}{6EI_{i+1}} + \frac{\kappa_{i+1}}{GA_{i+1}} \frac{M_i - M_{i+1}}{L_{i+1}} + \beta_{i+1} + \theta_{i0}^r \tag{16}$$

ここに， $\beta_i$ ， $\beta_{i+1}$ ：左右の径間における部材回転角（例えば支点沈下に対応）， $\theta_{i0}^l$ ， $\theta_{i0}^r$ ：左右の径間に作用する中間荷重による支点  $i$  の左右近傍の回転角

変位の適合条件  $\theta_{i0}^l = \theta_{i0}^r$  に式(15)および(16)を代入して整理すると，

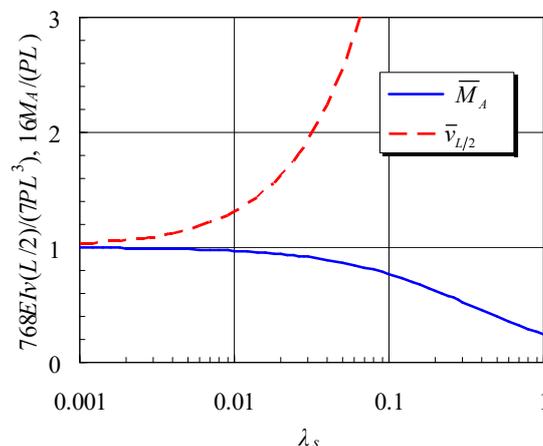


図 2-1-0 固定-ヒンジはりの支点モーメント，支間たわみと  $\lambda_s$  の関係

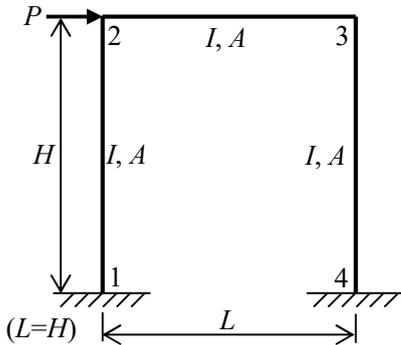


図 2-1-3 横荷重を受ける門形ラーメン

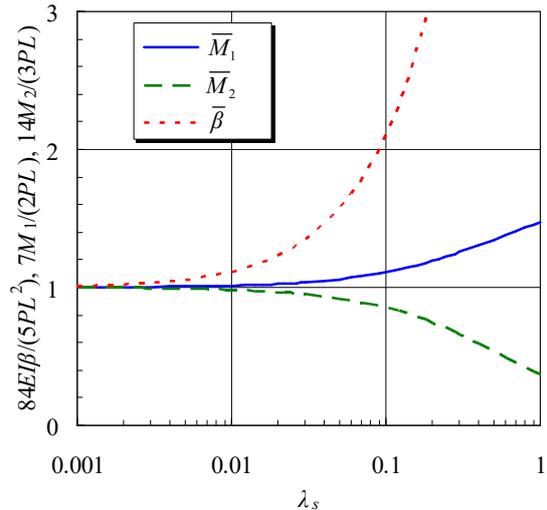


図 2-1-4 門形ラーメンの節点曲げモーメント, 部材回転角と  $\lambda_s$  の関係

$$(1-6\lambda_i)\frac{L_i}{I_i}M_{i-1} + 2(1+3\lambda_i)\frac{L_i}{I_i}M_i + 2(1+3\lambda_{i+1})\frac{L_{i+1}}{I_{i+1}}M_{i+1} + (1-6\lambda_{i+1})\frac{L_{i+1}}{I_{i+1}}M_{i+1} = 6E(\theta'_{i0} - \theta''_{i0}) + 6E(\beta_i - \beta_{i+1}) \quad (17)$$

等径間等剛性の場合,

$$(1-6\lambda)M_{i-1} + 4(1+3\lambda)M_i + (1-6\lambda)M_{i+1} = \frac{6EI}{L}(\theta'_{i0} - \theta''_{i0}) + \frac{6EI}{L}(\beta_i - \beta_{i+1}) \quad (18)$$

## 2) 適用例

前項の集中荷重を受ける一端固定他端ヒンジのはりの計算に 3 連モーメント公式(17)を適用すると, 簡単に左支点のモーメントを計算できる. 式(17)において左径間の剛性を $\infty$ とし  $M_i$ を  $M_A$ , 右支点の  $M_B=0$  とすると,

$$2(1+3\lambda)M_A = -\frac{6PL^2}{16}, \quad M_A = -\frac{PL^2}{16} \frac{3}{1+3\lambda}$$

ここでは別の問題として, 図 2-1-3 に示す門形ラーメンを計算しよう. 3 連モーメント公式を節点 1 および節点 2 について適用すると

$$2(1+3\lambda)M_1 + (1-6\lambda)M_2 = -\frac{6EI}{L}\beta$$

$$(1-6\lambda)M_1 + 4(1+3\lambda)M_2 + (1-6\lambda)M_3 = \frac{6EI}{L}\beta$$

せん断力の釣り合いより

$$M_2 - M_1 = \frac{PL}{2}$$

対称構造に逆対称荷重が作用しているので,  $M_2 = -M_3$

これらの連立方程式を解くと,

$$M_1 = -\frac{4+12\lambda}{2(7+12\lambda)}PL, \quad M_2 = \frac{3PL}{2(7+12\lambda)}, \quad \beta = \frac{PL^2}{12EI} \frac{5+66\lambda+72\lambda^2}{7+12\lambda}$$

図 2-1-4 にせん断パラメータ  $\lambda$  と節点モーメント  $M_1$ ,  $M_2$  および柱部材回転角  $\beta$  の関係を示す. 実

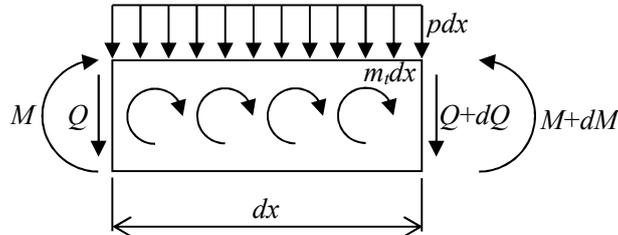


図 2-15 はりの微小区間における釣り合い

実際のせん断パラメータの範囲  $\lambda_s < 0.1$  において, せん断パラメータの増加につれ  $M_1$  の絶対値は微増,  $M_2$  は微減の傾向にあるが, 柱部材の回転角は明瞭に増加している. せん断変形が顕著に影響するせん断パラメータの値は単純ばりの場合より少し小さくなっている.

3) マトリクス変位法の剛性マトリックス

一般的な骨組構造物における部材のせん断変形の影響を評価する方法としてはマトリクス変位法が適っている. せん断変形を考慮するとひとつの節点に会合する部材のたわみ角は各部材に共通する変形量ではなく, 節点における局所的な変形がなければ, 部材端の回転角を節点回転角と考える.

部材軸が  $x$  軸に一致している場合 2 次元の骨組構造を対象としたマトリクス変位法の部材剛性マトリックス  $\mathbf{K}$  は, 以下のように与えられる.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ & 12EJ/L^3 & 6EJ/L^2 & 0 & -12EJ/L^3 & 6EJ/L^2 \\ & & 4(1+3\lambda_s)EJ/L & 0 & -6EJ/L^2 & 2(1-6\lambda_s)EJ/L \\ & & & EA/L & 0 & 0 \\ sym. & & & & 12EJ/L^3 & -6EJ/L^2 \\ & & & & & 4(1+3\lambda_s)EJ/L \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここに,  $EJ = EI/(1+12\lambda_s)$

任意の方向を向いた部材を扱うための座標変換マトリックスは通常のもので有効である.

(5) 振動方程式

ここでは Timoshenko ばりと称されているせん断変形とともに曲げ変形に伴う回転慣性を考慮したはりの振動方程式を示そう. 図 2-15 に示すようにはりの微小区間  $dx$  における作用力の釣り合いから出発する. 鉛直方向の釣り合いより

$$\begin{aligned} -Q + Q + dQ + p dx &= 0 \\ \frac{dQ}{dx} &= -p \end{aligned} \quad (20)$$

偶力の釣り合いより

$$\begin{aligned} Q dx + m_i dx - dM &= 0 \\ \frac{dM}{dx} &= Q - m_i \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)の両辺を 1 階微分し, 式(20)を用いて  $Q$  を消去すると

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -p - \frac{dm_i}{dx} \quad (22)$$

一方, 曲げモーメントと曲率の関係から

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx}$$

式(22)に代入すると

$$EI \frac{d^3\theta}{dx^3} = p - \frac{dm_i}{dx} \quad (23)$$

既に説明した回転角, たわみ角およびせん断ひずみの関係より

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} = \frac{d^4v}{dx^4} - \frac{d^3\gamma}{dx^3}$$

を考慮すると

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = p - \frac{dm_i}{dx} - \frac{\kappa EI}{GA} \frac{d^2p}{dx^2}$$

ダランベールの定理より分布外力  $p$  と  $m_i$  を慣性項に置き換えると, せん断変形と回転慣性を考慮した, いわゆる Timoshenko 通りの自由振動方程式が与えられる.

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left( \frac{m_\theta}{g} + \frac{m}{g} \frac{\kappa EI}{GA} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = - \frac{m}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{m}{g} \frac{m_\theta}{g} \frac{\kappa}{GA} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} \quad (24)$$

### (6) 連続ばりの固有振動

一般にはりの微小振動においてはせん断変形と回転慣性の両方を同時に考慮しなければならないケースは稀である. そこで, 簡単のため回転慣性の影響を省略してせん断変形の影響のみを考慮すると, 動的3連モーメント公式を誘導することができる.

$$C_1 M_{i-1} + (C_2 + C_3) M_i + C_4 M_{i+1} = 0 \quad (25)$$

ここに,

$$C_1 = \frac{-\frac{\alpha_i}{\sin \alpha_i L_i} \{1 - \lambda_{si} (\beta_i L_i)^2\} + \frac{\beta_i}{\sinh \beta_i L_i} \{1 + \lambda_{si} (\alpha_i L_i)^2\}}{EI_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2)}$$

$$C_2 = \frac{-\alpha_i \cos \alpha_i L_i \{1 - \lambda_{si} (\beta_i L_i)^2\} - \beta_i \cosh \beta_i L_i \{1 + \lambda_{si} (\alpha_i L_i)^2\}}{EI_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2)}$$

$$C_3 = \frac{-\alpha_{i+1} \cos \alpha_{i+1} L_{i+1} \{1 - \lambda_{s(i+1)} (\beta_{i+1} L_{i+1})^2\} - \beta_{i+1} \cosh \beta_{i+1} L_{i+1} \{1 + \lambda_{s(i+1)} (\alpha_{i+1} L_{i+1})^2\}}{EI_{i+1} (\alpha_{i+1}^2 + \beta_{i+1}^2)}$$

$$C_4 = \frac{-\frac{\alpha_{i+1}}{\sin \alpha_{i+1} L_{i+1}} \{1 - \lambda_{s(i+1)} (\beta_{i+1} L_{i+1})^2\} + \frac{\beta_{i+1}}{\sinh \beta_{i+1} L_{i+1}} \{1 + \lambda_{s(i+1)} (\alpha_{i+1} L_{i+1})^2\}}{EI_{i+1} (\alpha_{i+1}^2 + \beta_{i+1}^2)}$$

$$\lambda_{sk} = \frac{\kappa EI_k}{GA_k L_k^2}, \quad \alpha_k = \sqrt{r_k^4 + s_k^4 + r_k^2}, \quad \beta_k = \sqrt{r_k^4 + s_k^4 - r_k^2}, \quad r_k^2 = \frac{m_k \kappa \omega^2}{2gGA_k}, \quad s_k^4 = \frac{m_k \omega^2}{gEI_k} \quad (k = i, i+1)$$

因みに, 2 径間連続ばり (等径間, 一定剛性) の対称振動の振動数方程式は

$$\alpha L \cot \alpha L \{1 - \lambda_s (\beta L)^2\} - \beta L \coth \beta L \{1 + \lambda_s (\alpha L)^2\} = 0 \quad (26)$$

また 3 径間連続ばり (等径間, 一定剛性) の対称振動および逆対称振動の振動数方程式は, それぞれ以下のように与えられる.

$$\alpha L \{1 - \lambda_s (\beta L)^2\} \{2 \cot \alpha L - \operatorname{cosec} \alpha L\} - \beta L \{1 + \lambda_s (\alpha L)^2\} \{2 \coth \beta L - \operatorname{cosech} \beta L\} = 0 \quad (27)$$

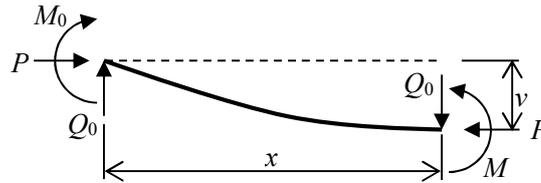


図2-17 圧縮を受ける部材の釣り合い

$$aL\{1 - \lambda_s(\beta L)^2\}(2\cot aL - \operatorname{coseca}L) + \beta L\{1 + \lambda_s(aL)^2\}(2\coth \beta L - \operatorname{cosech}\beta L) = 0 \quad (28)$$

図2-16に2径間および3径間連続ばりの低次固有振動数とせん断パラメータの関係を示す。いずれも等径間一定剛性の場合を想定しておりせん断パラメータの評価長は径間長に取っている。それで2径間連続ばりの逆対称1次と3径間連続ばりの対称1次とは同じ特性曲線となる。

(7) 座屈方程式

1) 座屈方程式の誘導

圧縮軸力を受ける部材の曲げ座屈におけるせん断変形の影響について説明する。部材の弾性座屈強度は部材長の平方に反比例するから、部材長に対する断面の代表寸法（断面2次半径）の比  $L/r$  が大きい部材について座屈問題は重要である。これに対してせん断変形の影響はこの節で見てきたように、部材長の平方に反比例するせん断パラメータが大きい場合、すなわち断面の代表寸法に対して部材長が極端に大きくない場合に顕著に現れるので、一般の構造部材（例えば充腹ウェブを有する部材）の座屈問題においてはあまり重要ではない。しかし組み立て断面などで、ウェブのせん断剛性が曲げ剛性に比べて相対的に小さい場合にせん断変形の考慮が必要である。

図2-17に示す、軸圧縮力を受ける部材のたわみの効果を考慮した、偶力の釣り合いからスタートする。

$$M = M_0 + Q_0x + Pv \quad (29)$$

ここに、 $M_0$ および $Q_0$ ：部材の左端に作用しているモーメントおよび横力であり、 $Q_0$ はせん断力とは異なることを理解して欲しい。

曲げモーメントを変位表示すると

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx} \quad (30)$$

前述の回転角、たわみ角およびせん断ひずみの関係を用いると

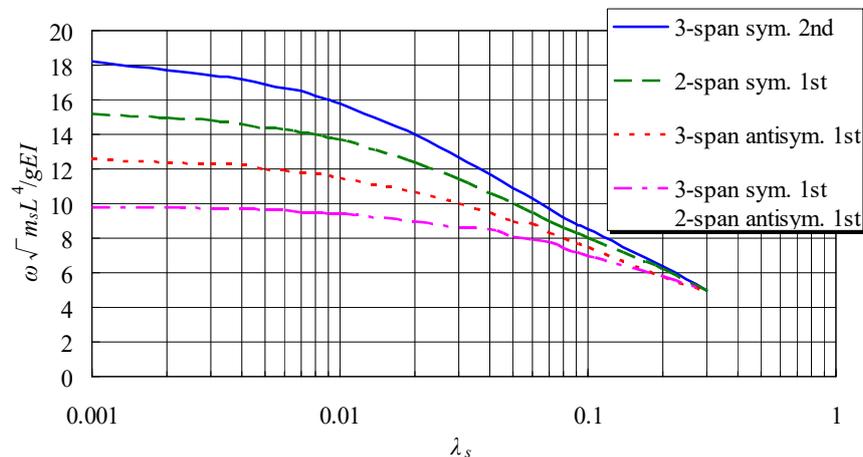


図2-16 3径間連続ばりの低次固有曲げ振動数とせん断パラメータの関係

$$M = -EI \left( \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \right) \quad (31)$$

せん断力  $Q$  を次のように近似する.

$$Q = Q_0 + P \frac{dy}{dx}$$

断面の平均的せん断ひずみの変化率は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\kappa P}{GA} \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (32)$$

式(31)に代入すると

$$M = -EI \left( 1 - \frac{\kappa P}{GA} \right) \frac{d^2 v}{dx^2}$$

式(29)に代入して整理すると, せん断変形を考慮した曲げ座屈方程式として

$$EI \left( 1 - \frac{\kappa P}{GA} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = -M_0 - Q_0 x$$

あるいは

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha^2 v = -\frac{M_0}{EJ} - \frac{Q_0 x}{EJ} \quad (33)$$

ここに,  $\alpha^2 = P/EJ$ ,  $EJ = EI(1 - \kappa P/GA)$

座屈方程式の解は

$$v = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x - \frac{M_0}{\alpha^2 EJ} - \frac{Q_0 x}{\alpha^2 EJ} \quad (34)$$

ここに,  $C_1, C_2, M_0$  および  $Q_0$ : 境界条件によって定まる積分定数である.

## 2) 例題と座屈特性

### 両端ヒンジの圧縮材

境界条件:  $x=0$  で  $v=0$ ,  $M_0=0$ ,  $x=L$  で  $v=0$ , 対称性より  $Q_0=0$

座屈条件式は  $\sin \alpha L = 0$

正の最小根は  $\alpha L = \pi$

$$(\alpha L)^2 = \frac{PL^2}{EJ} = \pi^2$$

$$P = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 EJ = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 EI \left( 1 - \frac{\kappa P}{GA} \right)$$

座屈荷重は以下のように表現できる.

$$P_{cr} = \frac{P_E}{1 + \pi^2 \lambda_s} \quad (35)$$

ここに,  $P_E = EI(\pi/L)^2$ : オイラーの座屈荷重.

### 一端固定他端ヒンジの圧縮材

境界条件:  $x=0$  で  $v=0$ ,  $\theta=0$ ,  $x=L$  で  $v=0$ ,  $M=0$

$$C_2 = \frac{M_0}{\alpha^2 EJ}, \quad C_1 = -C_2 \frac{\cos \alpha L}{\sin \alpha L} = -\frac{M_0}{\alpha^2 EJ} \frac{\cos \alpha L}{\sin \alpha L}$$

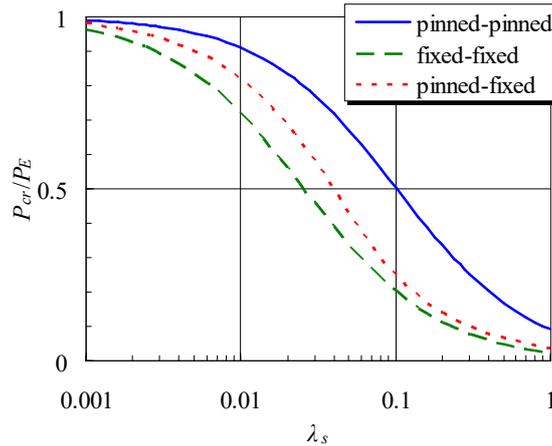


図 2-18 各種圧縮部材の弾性座屈荷重に対するせん断変形の影響

$$C_1 \sin \alpha L + C_2 \cos \alpha L - \frac{M_0}{\alpha^2 EJ} - \frac{Q_0 L}{\alpha^2 EJ} = -\frac{M_0}{\alpha^2 EJ} - \frac{Q_0 L}{\alpha^2 EJ} = 0$$

$$M_0 = -Q_0 L$$

座屈条件式：

$$\left\{1 - \lambda_s (\alpha L)^2\right\} \frac{\alpha L \cos \alpha L}{\sin \alpha L} - 1 = 0 \quad (36)$$

せん断変形が無視できる場合の座屈条件式：

$$\frac{\alpha L}{\tan \alpha L} - 1 = 0$$

これらの座屈条件式から解析的に座屈荷重を求めることができないので、数値計算によって近似解を求める必要がある。

### 両端固定の圧縮材

境界条件： $x=0$  で  $v=0, \theta=0, x=L$  で  $v=0$ , 対称性より  $Q_0=0$

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{M_0}{\alpha^2 EJ}$$

$$C_1 \sin \alpha L + C_2 \cos \alpha L - \frac{M_0}{\alpha^2 EJ} = \frac{M_0}{\alpha^2 EJ} (\cos \alpha L - 1) = 0$$

座屈条件式：

$$\cos \alpha L - 1 = 0$$

正の最小根  $\alpha L = 2\pi$

$$(\alpha L)^2 = \frac{PL^2}{EJ} = 4\pi^2$$

$$P = 4 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EJ = 4 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI \left(1 - \frac{\kappa P}{GA}\right)$$

$$P_{cr} = \frac{4P_E}{1 + 4\pi^2 \lambda_s} \quad (37)$$

上に示した3種の圧縮部材について、弾性座屈荷重とせん断パラメータ  $\lambda_s$  の関係を図 2-18 に示す。

座屈荷重は同じ境界条件でせん断変形を無視した場合の弾性座屈荷重で除して無次元表示している．せん断変形の影響によって座屈強度が低下し始めるせん断パラメータの値を限界せん断パラメータと称することにすると，境界条件による有効座屈長の短い部材ほど限界せん断パラメータが小さくなっている．

## 2. 3の参考文献

### 参考文献

- 1) 亀井義典・松野正見・西村宣男：多列高力ボルト摩擦接合引張継手のすべり強度に関する解析的研究，土木学会論文集，No.640/I-50，2000.

## 2. 4 組み立て断面部材の換算剛性

(1) はじめに

前節のせん断変形を考慮したはりの曲げ理論は, はりの支間長とはり高さの比が小さい場合, あるいは同じ骨組構成が繰り返し連続するトラス構造を充腹ばりに見立てて取り扱う場合に有効である. トラス構造の置換ばりにおけるせん断変形は腹材 (斜材, 骨組み構成によっては垂直材を含む) の弾性変形に関係しており, 長支間トラスにおいてもその影響を無視することはできない.

本節ではトラス桁等の等価曲げ剛性, せん断剛性の定義と連続体置換における力学的問題点を説明する.

(2) ブレースされた平行弦の曲げおよびせん断

### 1) トラス構造の連続体置換

トラスの部材力 (軸力) は部材の中間に作用する荷重がなければ, 格点間で一定で離散的性質を呈するのに対し, はりの断面力は連続的に変化するので, 特に部材力の計算においてトラスの特性を考慮する必要がある. 平行弦トラスの部材力計算には断面法が適用されるが, 格点回りの偶力の釣り合い条件から直接弦材力を計算できる. 弦材毎に対応する格点が定まっており, 構造解析によって必要な格点モーメントを計算する. 一方, 斜材力は格間せん断力に方向余弦を乗じて求められるから, 格点モーメントの計算と同時に格間せん断力を求めておくとよい.

### 2) 平行弦トラスの曲げ剛性

図 2-19 に示すトラス 1 構面の水平軸回りの曲げ剛性は以下のように計算される. 上弦材から図心 C までの距離  $e_y$  は

$$e_y = \frac{A_{cl} h}{A_{cu} + A_{cl}} \quad (1)$$

ここに,  $h$ : 上下弦材の距離,  $A_{cu}$ : 上弦材断面積,  $A_{cl}$ : 下弦材断面積.

図心を通る水平軸に関する断面 2 次モーメント  $I$  は

$$I = A_{cu} e_y^2 + A_{cl} (h - e_y)^2 = \frac{A_{cu} A_{cl}}{A_{cu} + A_{cl}} h^2 \quad (2)$$

今日では殆どのトラス構造は, 節点に集まる部材が剛に結合される剛節トラスである. その場合, ト

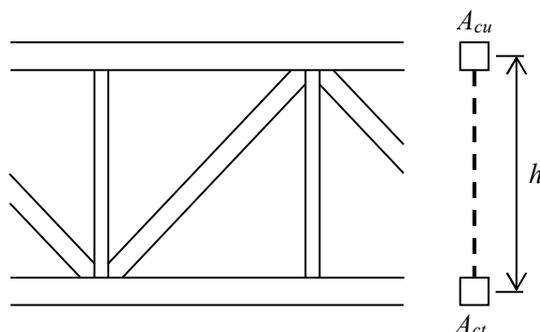


図 2-19 ブレースされた平行弦

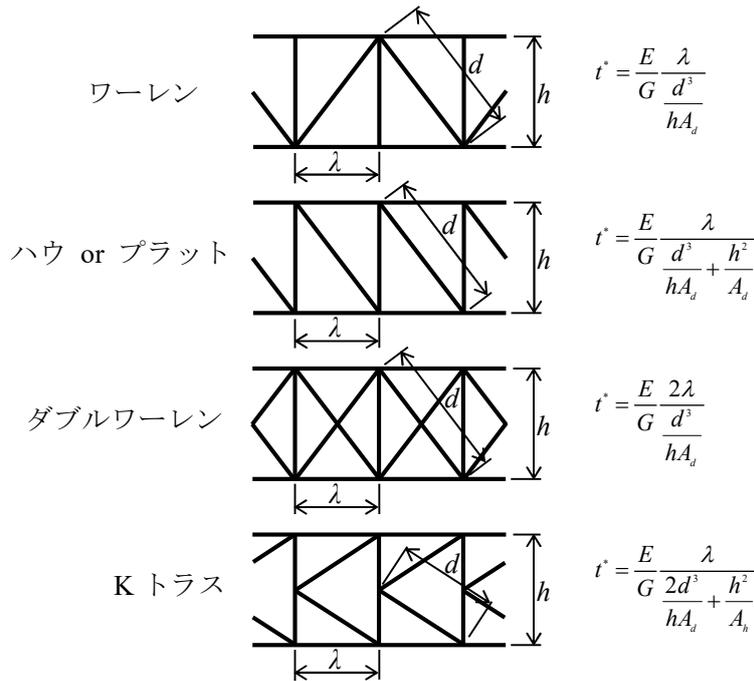


図 2-20 代表的腹材の等価板厚

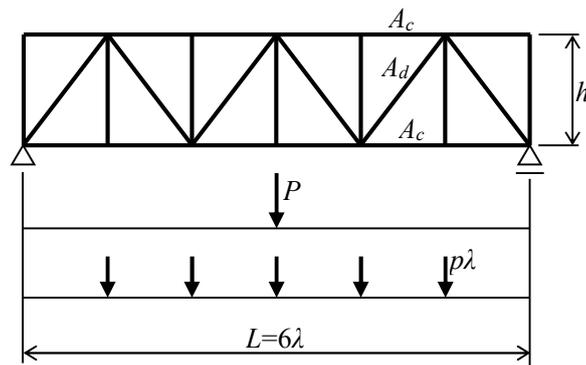


図 2-21 6 格間の修正ワレントラス

ラス構面のせん断剛性が相対的に小さい場合，弦材自体の断面 2 次モーメントが効いてくる．式(2)に上下弦材の断面 2 次モーメントを加えて

$$I = \frac{A_{cu} A_{cd}}{A_{cu} + A_{cd}} h^2 + I_{cu} + I_{cd} \quad (3)$$

ここに， $I_{cu}$ ：上弦材の断面 2 次モーメント， $I_{cd}$ ：下弦材の断面 2 次モーメント．

式 (2) および式 (3) に弾性係数  $E$  を乗ずると曲げ剛性となる．

### 3) トラス構面のせん断剛性

トラス構面のせん断剛性は斜材と場合によっては垂直材の弾性変形に関係している．トラスの 1 パネルに着目し，腹材の変形によるパネルのせん断変形と等価なトラスと同じ大きさの板の厚さを等価板厚  $t^*$  と称する．トラスの構高を  $h$  とすると構面のせん断剛性は

$$GA = Gt^*h \quad (4)$$

と表すことができる．トラスの場合，せん断流は一定であるから形状係数は 1 と考えることができる．

図 2-20 に代表的トラス構面のはり置換に用いる等価板厚を掲げる．

### 4) 簡単な変位の計算例

図 2-21 に示す 6 格間の単純トラスに集中荷重  $P$  が支間中央に作用する場合と等分布荷重が満載

(間接荷重として扱う) した場合について，支間中央上弦材格点の鉛直変位を単位荷重法による構造力学上の厳密値と置換ばり理論による値を比較してみよう．なお簡単のため，弦材および斜材の断面積はそれぞれ一定値で  $A_c$  および  $A_d$  と表す．

**集中荷重**

単位荷重法による変位の計算では弦材が関与する量と斜材が関与する量を別個に求める．

$$v = \frac{4 \frac{P\lambda}{2h} \cdot \frac{\lambda}{2h} \cdot \lambda + 4 \frac{P\lambda}{h} \cdot \frac{\lambda}{h} \cdot \lambda + 2 \frac{3P\lambda}{2h} \cdot \frac{3\lambda}{2h} \cdot \lambda}{EA_c} + \frac{6 \frac{Pd}{2h} \cdot \frac{d}{2h} \cdot d}{EA_d} \tag{5}$$

$$= 9.5 \frac{P\lambda^3}{EA_c h^2} + 1.5 \frac{Pd^3}{EA_d h^2}$$

置換ばり理論による支間中央のたわみは曲げによる変位とせん断変形による変位の和として

$$v = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4GA_w} = 9.0 \frac{P\lambda^3}{EA_c h^2} + 1.5 \frac{Pd^3}{EA_d h^2} \tag{6}$$

**等分布荷重**

**単位荷重法**

$$v = \frac{4 \frac{p\lambda^2}{h} \cdot \frac{\lambda}{2h} \cdot \lambda + 4 \frac{p\lambda^2}{h} \cdot \frac{\lambda}{h} \cdot \lambda + 2 \frac{4.5p\lambda^2}{2h} \cdot \frac{3\lambda}{2h} \cdot \lambda}{EA_c} + \frac{2 \frac{2.5p\lambda d}{h} \cdot \frac{d}{2h} + 2 \frac{1.5p\lambda d}{h} \cdot \frac{d}{2h} + 2 \frac{0.5p\lambda d}{h} \cdot \frac{d}{2h}}{EA_d} \tag{7}$$

$$= 34.5 \frac{p\lambda^4}{EA_c h^2} + 4.5 \frac{p\lambda d^3}{EA_d h^2}$$

**置換ばり理論**

$$v = \frac{5pL^4}{384EI} + \frac{pL^2}{8GA_w} = 33.75 \frac{p\lambda^4}{EA_c h^2} + 4.5 \frac{p\lambda d^3}{EA_d h^2} \tag{8}$$

図 2-22 は集中荷重が作用する場合について，単位荷重法および置換ばり理論によるスパン中央のたわみとトラスのパネル数の関係を表している．同時にせん断変形を無視した場合（斜材の弾性変形を無視）の値も示している．図より置換ばり理論で実用的に十分な精度でたわみを計算できることが分かる．またパネル数は  $n=10$  までを示したが， $n=10$  でも全変位に占めるせん断変形の割合は 30% を越えあ無駄であり， $n=20$  の場合でもせん断変形の割合は約 10%， $n=30$  で 5% も残っている．但し， $A_c =$

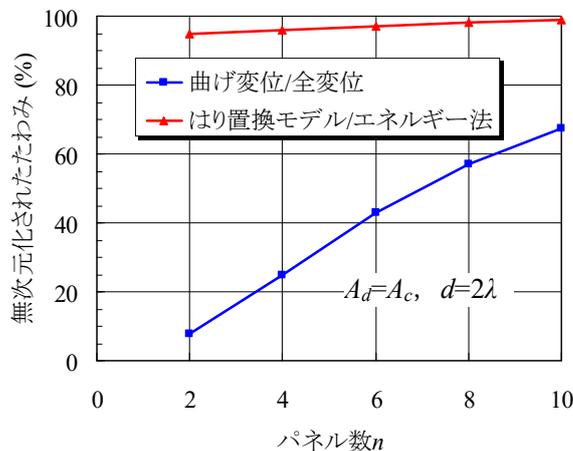


図 2-22 トラス桁のはり置換モデルの精度とせん断変形の影響

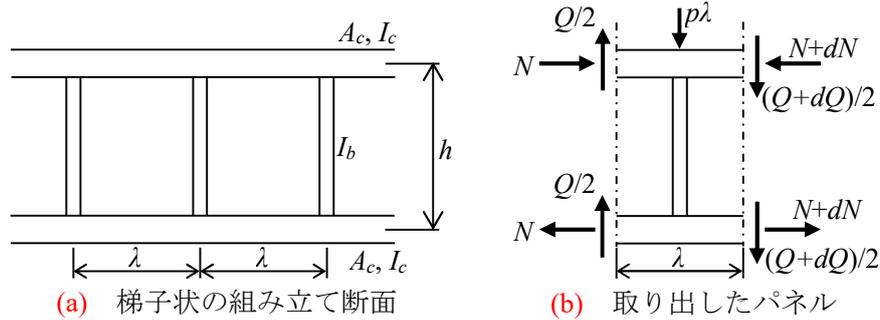


図 2-23 Battered Member のはり置換

$A_b, d=2\lambda$  の場合である. このようにトラス構造を置換ばり理論で表現するときは, せん断変形の影響を無視することができない.

(3) タイプレートで連結された平行弦の曲げおよびせん断

図 2-23 (a) に示すように 2 本の弦材を一定間隔に配置された垂直部材で連結した梯子状の組み立て断面は, フィーレンディール桁あるいはタイプレートで連結された組み立て断面材 (battered member) として活用されている. 前項の上下弦材を斜材で連結したトラス桁に比べて弦材間の結合が弱いから, はり断面の曲げ剛性に対して弦材の軸剛性が効率的に寄与せず, そのため弦材自体の曲げ剛性が相対的に重要となる.

1) せん断剛性

図 2-23 (b) のように 1 パネルを取り出し弦材の先端に  $Q/2$  ずつのせん断力を作用させる. そのときの先端の変位  $\delta$  は, 弦材と垂直材の曲げ変形のみを考慮すると

$$\delta = \left( \frac{\lambda^3}{2EI_c} + \frac{\lambda^3 h}{12EI_b} \right) Q = \frac{Q\lambda}{Gt^*h} \tag{9}$$

従って, はり置換理論におけるウェブの等価板厚として

$$t^* = \frac{E}{G} \cdot \frac{24I_c I_b}{\lambda^2 h I_b + 2h^2 \lambda I_c} \tag{10}$$

が与えられる.

2) 曲げ変形

パネルのせん断変形角  $\beta$  は  $\delta/\lambda$  で与えられるから, 垂直部材の材端モーメント  $M_b$  およびせん断力  $Q_b$  は

$$M_b = \frac{Q\lambda}{h} = \frac{Gt^* h \lambda}{4} \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) \tag{11}$$

$$Q_b = 2 \frac{M_b}{h} = \frac{Gt^* \lambda}{2} \left( \frac{dv}{dx} - \theta \right) \tag{12}$$

これらの垂直材の材端力が弦材の軸方向に連続的に分布するものと考えれば, 軸方向力  $N_c$  に関して以下の条件式が与えられる.

$$\frac{dN_c}{dx} = - \frac{EA_w h}{2} \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \tag{13}$$

ところで弦材自体の曲げ剛性はたわみ  $v$  の導関数, 弦材断面の伸び剛性は回転角  $\theta$  の導関数に対して

$$2EI_c \frac{d^4 v}{dx^4} + EA_c \frac{h^2}{2} \cdot \frac{d^3 \theta}{dx^3} = p \quad (14)$$

と表すことができる。式(13)の関係を用いると、弾性方程式は

$$EI_g \frac{d^4 v}{dx^4} - EK \frac{d^6 v}{dx^6} = p - \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (15)$$

ここに、 $EI_g = 2EI_c + \frac{h^2 EA_c}{2}$ ,  $EK = \kappa EI_m$ ,  $\kappa = \frac{(b^2 \lambda^2 I_b + 2b^3 \lambda I_c) A_m}{12I_b I_c}$

とたわみ  $v$  に関する 6 階の微分方程式となる。

置換ばりの変位自由度はたわみ  $v$ , たわみ角  $dv/dx$  および回転角  $\theta$  の 3 である。通常のはりでせん断変形を無視する場合の変位自由度 ( $v$ ,  $dv/dx$ ) あるいはせん断変形を考慮する場合の変位自由度 ( $v$ ,  $\theta$ ) と比べて変位自由度が 1 増えている。このような変位自由度のはりは後述する積層ばりや第 3 章の **3. 4** で述べる 2 主桁構造や **3. 6** の波形鋼板ウェブ PC 桁でも現れる。

## 2.5 積層ばりの曲げ

### (1) はじめに

材料定数の異なる板材を貼り合わせた構造を積層構造（積層ばり，積層板など）と言う。各種の繊維補強プラスチック（FRP）など新素材の出現により積層構造の活用が増してきている。重ねばりとの相違は，積層ばりの場合曲げに伴う境界面の軸方向変位が互いに拘束し合っており，各層が一体となって曲げ変形に抵抗するところにある。

典型的な2層構造は合成桁である。一般に合成桁では曲げに伴うせん断変形の影響は無視できるほど小さく，断面全体で平面が保持されると考えるから，断面の曲げ剛性の計算や曲げひずみの計算過程で弾性係数の違いをどちらかの材料に換算するだけで，積層ばりとしては扱わない。ここではまず理論構成上の理由により2層の積層ばりに関する基礎的理論を説明する。続いて最も実構造として活用されている3層積層ばりに関する曲げ理論を展開する。

3層積層ばりは中央のコア材の両面に材質の異なるフェーシング材を貼り付ける構造が一般的であり，制振板が代表的な例である。土木分野で用いられている構造では，2主桁構造の水平曲げや波形鋼板ウェブPC箱桁の鉛直曲げを積層ばりとして記述することができる。それらの詳細は3.4および3.6で記述する。

### (2) 2層積層ばりの弾性方程式

#### 1) 変位場

図2-24(a)に示す幅***b***高さ***h***<sub>1</sub>および***h***<sub>2</sub>の2枚の長方形断面の板を貼り合わせた積層ばりを考える。各層は材料特性が異なり，弾性係数はそれぞれ***E***<sub>1</sub>，***G***<sub>1</sub>および***E***<sub>2</sub>，***G***<sub>2</sub>と表すことにする。

$$\gamma_1 = \frac{dv}{dx} - \theta_1, \quad \gamma_2 = \frac{dv}{dx} - \theta_2 \tag{1}$$

図心位置 *e<sub>y</sub>* を断面の上縁からの距離とし，*e<sub>y</sub>* > *h*<sub>1</sub> の場合，各層の図心の軸方向変位は

$$u_1 = \frac{\theta h_1}{2} + (e_y - h_1)\theta_1, \quad u_2 = \left( h_1 + \frac{h_2}{2} - e_y \right)\theta_2 \tag{2}$$

#### 2) 断面力の変位表示

各層の軸方向力および曲げモーメントは対応する軸方向変位 *u* あるいは回転角 *θ* によって表すと

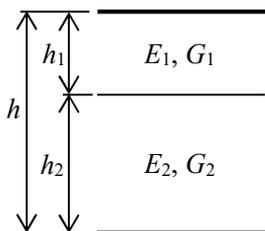


図2-24(a) 2層積層ばり

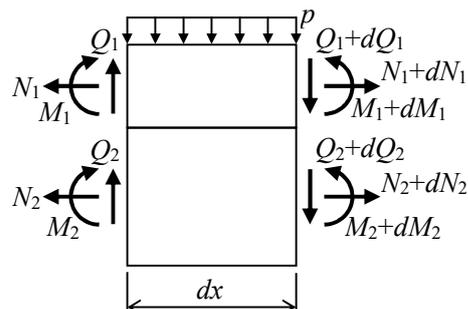


図2-24(b) 微小区間での断面力と外力の釣り合い

$$N_1 = E_1 A_1 \frac{du_1}{dx}, \quad N_2 = E_2 A_2 \frac{du_2}{dx} \quad (3)$$

$$M_1 = -E_1 I_1 \frac{d\theta_1}{dx}, \quad M_2 = -E_2 I_2 \frac{d\theta_2}{dx} \quad (4)$$

3) 断面力と外力の関係

図 2-24(b) に示す微小区間  $dx$  における断面力と外力の釣合条件式は

- ・軸方向力の釣り合い

$$N_1 + N_2 = 0 \quad (5)$$

$$-N_1 = N_2 = N \quad (6)$$

層間の伝達せん断流を  $q$  と表すと

$$\frac{dN_1}{dx} = -q, \quad \frac{dN_2}{dx} = q \quad (7)$$

- ・せん断方向力の釣り合い

$$-Q_1 - Q_2 + Q_1 + dQ_1 + Q_2 + dQ_2 + p dx = 0$$

$$\frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dx} = -p \quad (8)$$

- ・偶力の釣り合い

$$M_1 + M_2 + N \frac{h}{2} - M_1 - dM_1 - M_2 - dM_2 - (N + dN) \frac{h}{2} + (Q_1 + Q_2) dx = 0$$

$$\frac{dM_1}{dx} + \frac{dM_2}{dx} - \frac{h}{2} \frac{dN}{dx} = Q_1 + Q_2 \quad (9)$$

式(9)の両辺を 1 階微分し，式(8)の関係を用いると

$$-\frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{d^2 M_2}{dx^2} + \frac{h}{2} \frac{d^2 N}{dx^2} = p \quad (10)$$

4) 弾性方程式の誘導

式(10)に含まれている  $M_1, M_2, N$  を式(3)および(4)に代入すると

$$\left\{ E_1 I_1 + E_2 I_2 + \frac{h^2}{4} E_1 A_1 + (e_y - h_1) \frac{h}{2} E_1 A_1 \right\} \frac{d^4 v}{dx^4} - \left( E_1 I_1 + \frac{h^2}{4} E_1 A_1 \right) \frac{\kappa_1}{G_1 A_1} \frac{d^3 Q_1}{dx^3} - \left\{ E_2 I_2 + (e_y - h_1) \frac{h}{2} E_1 A_1 \right\} \frac{\kappa_2}{G_2 A_2} \frac{d^3 Q_2}{dx^3} = p \quad (11)$$

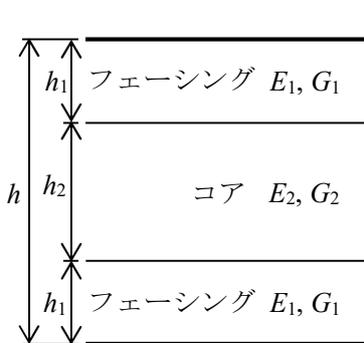


図 2-25(a) 3 積層ばり

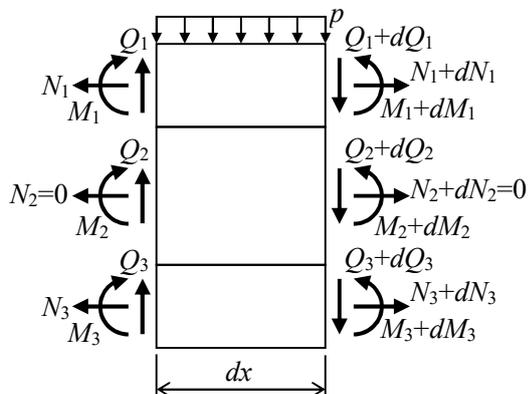


図 2-25(b) 微小要素に作用する断面力の釣り合い

## (3) 3層積層ばりの弾性方程式

## 1) 変位場

図 2-25(a) に示すように, コア材の上下面に等しいフェーシング材を貼り付けた 3 層積層ばりを考える. このような積層ばりの変位自由度は対称性により 2 層積層ばりと同様に, たわみ  $v$ , と 2 つの回転角  $\theta_1, \theta_2$  の 3 である. 上下のフェーシング材の回転角は等しい.

たわみ角  $dv/dx$  と回転角  $\theta_1, \theta_2$  の関係はせん断変形角  $\gamma_1, \gamma_2$  を介して

$$\gamma_1 = \frac{dv}{dx} - \theta_1, \quad \gamma_2 = \frac{dv}{dx} - \theta_2, \quad \gamma_3 = \frac{dv}{dx} - \theta_1 \quad (1)$$

各層の軸方向変位は

$$u_1 = \frac{\theta_1 h_1}{2} + \frac{\theta_2 h_2}{2}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = -\frac{\theta_1 h_1}{2} - \frac{\theta_2 h_2}{2} \quad (2)$$

## 2) 断面力の変位表示

各層の断面力を変位で表すと

$$N_1 = E_1 A_1 \frac{du_1}{dx}, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = -N_1 \quad (3)$$

$$M_1 = -E_1 I_1 \frac{d\theta_1}{dx}, \quad M_2 = -E_2 I_2 \frac{d\theta_2}{dx}, \quad M_3 = M_1 \quad (4)$$

## 3) 断面力と外力の関係

図 2-25(b) の微小要素  $dx$  に作用する断面力の釣り合いより

・せん断方向力の釣り合い

$$2 \frac{dQ_1}{dx} + \frac{dQ_2}{dx} + p = 0 \quad (5)$$

・偶力の釣り合い

$$(2Q_1 + Q_2) - 2 \frac{dM_1}{dx} - \frac{dM_2}{dx} + (h_1 + h_2) \frac{dN_1}{dx} = 0 \quad (6)$$

## 4) 弾性方程式の誘導

式(6)の両辺を 1 階微分すると

$$-2 \frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{d^2 M_2}{dx^2} + (h_1 + h_2) \frac{d^2 N_1}{dx^2} = p \quad (7)$$

式(7)に式(1)~(4)を代入して整理すると

$$\left\{ 2E_1 I_1 + (h_1 + h_2) \frac{h_1}{2} E_1 A_1 \right\} \left( \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{\kappa_1}{G_1 A_1} \frac{d^3 Q_1}{dx^3} \right) + \left\{ E_2 I_2 + (h_1 + h_2) \frac{h_2}{2} E_1 A_1 \right\} \left( \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{\kappa_2}{G_2 A_2} \frac{d^3 Q_2}{dx^3} \right) = p \quad (8)$$

2 層および 3 層積層ばりの弾性方程式を示したが, 最終形はせん断力ないしはせん断ひずみを含んだままであり, 3 変位自由度の問題に対する 6 階の微分方程式にはなっていない. せん断力やせん断ひずみを変位  $v$  のみの関数で一般表示するのは複雑であり, 構造に応じた単純化を取り込むことによって 6 階の微分方程式に到達することができる. 積層ばりに関する具体的な弾性方程式とその解, 構造特性および力学パラメータについては **3. 4 (2 主桁橋梁架設系の安定)** および **3. 6 (波形鋼板ウェブ PC 桁橋梁)** で解説する.

## 2. 6 はりのねじり

### (1) はりのねじり問題の分類

初等構造力学において, はりのねじり現象は詳しくは説明されないので, 技術者にとって不得意分野の一つとなっている. 本節では必要最小限の情報によってはりのねじり現象の概要を説明し, ねじりに関する諸問題に対する技術者の理解の手助けとしたい.

はり部材のねじり現象を理解するためには閉断面部材と開断面部材を区別して学習するとよい. 閉断面の多くのねじり問題は, 工学的には単純ねじり理論によって記述することが可能である. 例外としては, 断面の形状を保持するために必要なダイアフラムあるいは横ラーメン (外壁体を含む) の剛性が十分でなく, ねじりに伴い断面変形が生ずる場合や開断面部材の開口部を横繋ぎ材等で連結して準閉断面を構成してねじり剛性を高めようと意図する場合, 横繋ぎ材の剛性不足や連結部の弾性変形のため完全な閉断面のねじり剛性が発揮できないことがある. このような特例として閉断面はりの断面変形については 2. 7 で, 準閉断面部材のそりねじりについては 3. 6 で説明する.

開断面部材はねじり変形に対して 2 つの剛性を有する. St. Venant のねじり剛性とそりねじり剛性である. 相対的に部材が短い場合はそりねじり剛性が, 反対に部材が長い場合は S. Venant のねじり剛性が有効に働く. その識別はねじり定数比と称する力学パラメータで判定できること, 複雑な骨組構造物の中に組み込まれている個々の部材の挙動を合理的に評価するための判別法などを習得することが大切である.

### (2) 開断面部材の単純ねじり

図 2-26 の長方形断面を有する部材のねじりモーメント  $T$  とそれによって生ずるねじれ角の変化率 (ねじり率)  $\theta$  は, 弾性論によると以下の級数解で表現することができる<sup>1)</sup>.

$$T = G\theta \frac{ba^3}{3} \left[ 1 - \frac{192a}{\pi^6 b} \cdot \sum \frac{1}{(2n-1)^5 \tanh \frac{(2n-1)\pi b}{2a}} \right] \quad (1)$$

ねじり剛性  $GJ$  は

$$GJ = G \frac{ba^3}{3} \left[ 1 - \frac{192a}{\pi^6 b} \cdot \sum \frac{1}{(2n-1)^5 \tanh \frac{(2n-1)\pi b}{2a}} \right] \quad (2)$$

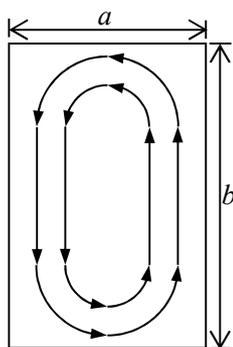


図 2-26 長方形断面のねじり

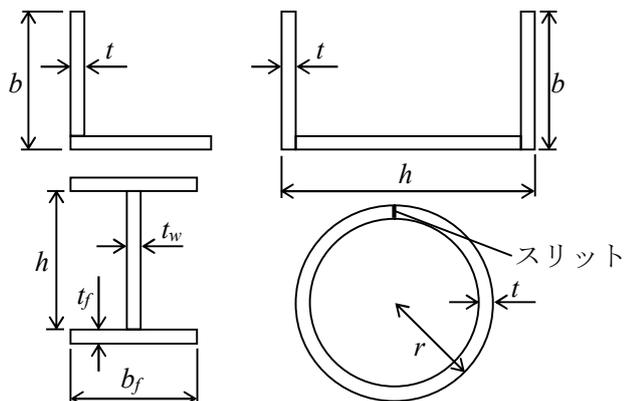


図 2-27 代表的開断面

細長い薄板の場合，無限級数の和を考慮するとねじり剛性  $GJ$  は

$$GJ = \frac{Gba^3}{3} \left( 1 - 0.63 \frac{a}{b} \right) \quad (3)$$

さらに厚さ  $t$ ，幅  $b$  の薄板のねじり剛性は， $a=t$ ， $b \gg t$  とすると

$$GJ = \frac{Gbt^3}{3} \quad (4)$$

となる．一般の開薄肉断面では

$$GJ = \frac{1}{3} \int t(s)^3 G ds \quad (5)$$

ここに， $\int ds$  は薄板の中心線に沿う積分を表す．

図 2-27 に示す代表的開断面部材のねじり剛性は以下の通りである．

山形断面： $GJ = \frac{2Gbt^3}{3}$

溝形断面： $GJ = \frac{Gt^3(2b+h)}{3}$

H形断面： $GJ = \frac{G(2t_f^3 b_f + t_w^3 h)}{3}$

スリットを有する円形断面： $GJ_s = \frac{2\pi Gt^3 r}{3}$

(3) 閉断面部材の単純ねじり

任意形状薄肉閉断面部材のねじり剛性は，以下のように誘導される．図 2-28 の閉断面部材がその両端で部材軸回りに逆向きのねじりモーメントを受ける場合，断面の外郭の薄板中心線に沿ったせん断流  $q = \tau t$  が流れる．これを循環せん断流と称する．せん断流  $q$  が断面のねじり中心  $O$  に対して与える偶力を全断面について積分したものが外力であるねじりモーメント  $T$  と釣り合う．

$$T = \int q r_s ds = 2q \int dF = 2qF \quad (6)$$

ここに， $F$  は外郭が囲む面積を表す．閉断面ではねじりモーメントは循環せん断流と外郭が囲む面積の 2 倍（倍面積）の積で与えられる．

閉断面に関しては薄板の部材軸方向変位が外郭上を回って一周すると元に戻る閉合条件が課せられ

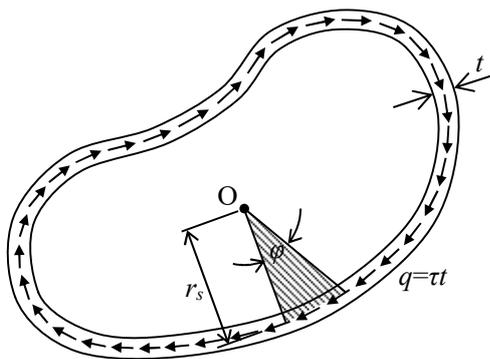


図 2-28 閉断面の循環せん断流

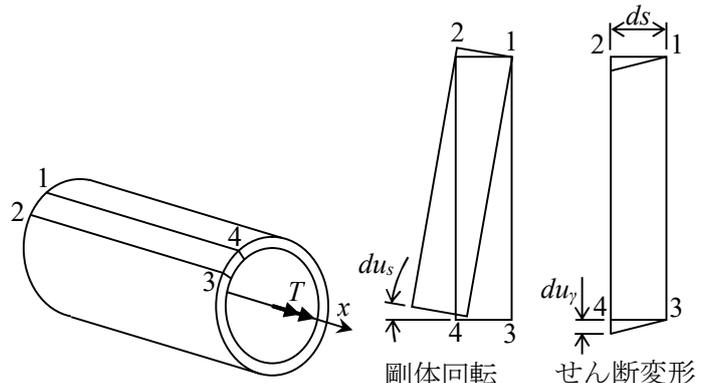


図 2-29 単純ねじりによる閉断面部材の変形

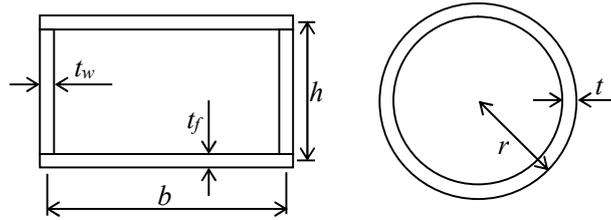


図 2-30 代表的閉断面

る. 図 2-29 に示すように, 軸方向変位はねじれ角による剛体回転変位  $u_\theta$  と循環せん断流によるせん断変形に起因する変位  $u_\gamma$  で構成され, それぞれ以下のように表される.

$$du_\theta = -r_s \theta ds \quad (7)$$

$$du_\gamma = \frac{\tau}{G} ds \quad (8)$$

$$du = du_\theta + du_\gamma - \left( r_s \theta - \frac{\tau}{G} \right) ds \quad (9)$$

閉合条件は

$$-\oint r_s \theta ds + \oint \frac{\tau}{G} ds = 0 \quad (10)$$

複数の材料で構成された複合断面への適用も考慮して, 式(10)より

$$\theta = \frac{q}{2FG_s} \oint \frac{n_s}{t} ds \quad (11)$$

ここに,  $G_s$ : 標準材料のせん断弾性係数,  $n_s$ : せん断弾性係数比.

$$\theta = \frac{T}{4F^2 G_s} \oint \frac{n_s}{t} ds \quad (12)$$

従って, 薄肉閉断面部材のねじり剛性は

$$GJ = \frac{(2F)^2 G_s}{\oint \frac{n_s}{t} ds} \quad (13)$$

と表される. 閉断面部材のねじり剛性は外郭の囲む面積  $F$  の 2 倍の自乗に比例する.

図 2-30 に示す代表的閉断面のねじり剛性は以下のように与えられる.

$$\text{箱形断面: } GJ = \frac{G(2bh)^2}{2 \left( \frac{b}{t_f} + \frac{b}{t_w} \right)} = \frac{2b^2 h^2 t_f t_w G}{bt_w + ht_f}$$

$$\text{円管断面: } GJ_c = \frac{(2\pi r^2)^2 G}{2\pi t} = 2\pi G r^3 t$$

前に示したスリットのない円管断面のねじり剛性  $GJ_c$  とスリットを有する円管断面のねじり剛性  $GJ_s$  の比は,  $r/t=10$  の場合  $GJ_c/GJ_s=300$ ,  $r/t=30$  の場合  $GJ_c/GJ_s=2700$  であることから, 閉断面と閉断面のねじり剛性の差を実感して欲しい.

$$\frac{GJ_c}{GJ_s} = 3 \left( \frac{r}{t} \right)^2$$

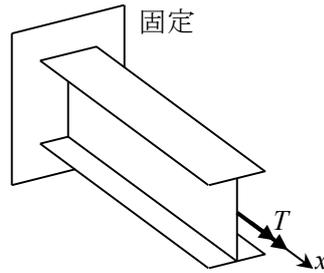


図 2-31 片持ちばりのそりねじり

(4) 開断面部材のそり拘束ねじり

図 2-31 に示す H 形断面の片持ちばりを考える．このように固定端で断面のそり変位が拘束され，他端でそりが自由な部材では，ねじりが作用するとき，部材軸方向にそりが変化する．そり変化はフランジの面内に曲げ応力を発生させる．これをそり応力 (warping stress) と称している．そり応力が部材軸方向に変化するとき，釣り合いを保つようにフランジの板厚中心線方向にせん断応力が発生する．このせん断応力は純ねじりによるせん断応力と区別するために，2 次せん断応力 (secondary shear stress) と称される．

図 2-31 の片持ちばりや部材の中間点でねじり荷重を受ける部材では部材軸方向にそりが変化する．本節の(2)，(3)で述べた単純ねじり (pure torsion) と区別してそり拘束ねじりあるいはそりねじり (warping torsion) と称されている．

そりねじり状態のはり断面には単純ねじりによるせん断応力と 2 次せん断応力が発生し，それらの合計が 2 つの部材軸回りのモーメント (St.Venant torsional moment, warping torsional moment) を構成している．

$$T_s = GJ \frac{d\phi}{dx}, \quad T_w = Q_f h \tag{14}$$

ここに， $Q_f$  はフランジに作用するせん断力を表す．両者の合計を全ねじりモーメントと称し，

$$T = T_s + T_w \tag{15}$$

フランジ面内の曲げモーメントは

$$M_f = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^3\phi}{dx^3} \tag{16}$$

フランジせん断力  $Q_f$  は

$$Q_f = -EI_f \frac{h}{2} \frac{d^2\phi}{dx^2} \tag{17}$$

そりねじりモーメントは

$$T_w = -EI_f \frac{h^2}{2} \frac{d^3\phi}{dx^3} = -EC_w \frac{d^3\phi}{dx^3} \tag{18}$$

全ねじりモーメントは

$$T = GJ \frac{d\phi}{dx} - EC_w \frac{d^3\phi}{dx^3} \tag{19}$$

分布ねじりモーメント荷重  $m_t$  は全ねじりモーメントの変化量と釣り合うから，式(19)を 1 階微分すると，開断面部材のそりねじりに関する弾性方程式が与えられる．

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} = m_t \quad (20)$$

後述するように部材長が短いとそり剛性  $EC_w$  の効果が現れる. その範囲では 2 次せん断応力に対応した 2 次せん断変位の影響が現れる可能性がある. フランジモーメント  $M_f$  はフランジの鉛直軸回り回転角  $\theta_f$  に対して

$$M_f = -\frac{EI_f h}{2} \frac{d\theta_f}{dx}$$

と表される.  $\theta_f$  とフランジのたわみ角  $\frac{h}{2} \frac{d\phi}{dx}$  およびせん断ひずみ  $\gamma_f$  の関係を用いると

$$M_f = -EI_f \left( \frac{h}{2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{\kappa}{GA_f} \frac{dQ_f}{dx} \right) \quad (21)$$

全ねじりモーメントは

$$T = GJ \frac{d\phi}{dx} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dx^3} + \kappa \frac{EI_f h}{GA_f} \frac{d^2 Q_f}{dx^2} \quad (22)$$

外力分布モーメント  $m_t$  とフランジせん断力  $Q_f$  の関係を

$$\frac{dQ_f}{dx} = -\frac{m_t}{h}$$

と仮定すると, 2 次せん断ひずみを考慮した開断面部材のそりねじり弾性方程式は以下のように与えられる.

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - GJ \frac{d^2 \phi}{dx^2} = m_t - \kappa \frac{EI_f}{GA_f} \frac{d^2 m_t}{dx^2} \quad (23)$$

## (5) 力学パラメータと構造特性

### 1) ねじり定数比

弾性方程式(20)の解は

$$\phi = C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x + C_3 x + C_4 - \frac{m_t}{2GJ} x^2 \quad (24)$$

ここに,  $\alpha^2 = \frac{GJ}{EC_w}$

薄肉開断面部材のそりねじり現象の力学パラメータは  $\alpha L$  である.  $\alpha L$  は 2 つのねじりに関する剛性の比に関係しており, ねじり定数比と呼ばれている.  $\alpha L$  が小さい場合は弾性方程式の左辺第 1 項のそり剛性の効果が卓越し, Vlasov ねじりと称される. 逆に  $\alpha L$  が大きくなると第 2 項の単純ねじりの効果が卓越し, St.Venant ねじりと称される. 具体的な例題により力学パラメータと変位量の間関係を調べてみる.

### 2) 等分布ねじれ荷重を受ける単純ばりの変形と断面力

図 2-32 のように等分布ねじりモーメント  $m_t$  を満載した単純ばりの境界条件は

$$\begin{aligned} x=0 & : \phi=0, \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2}=0 \\ x=L & : \phi=0, \quad \frac{d^2 \phi}{dx^2}=0 \end{aligned}$$

ねじれ角  $\phi$  の解は

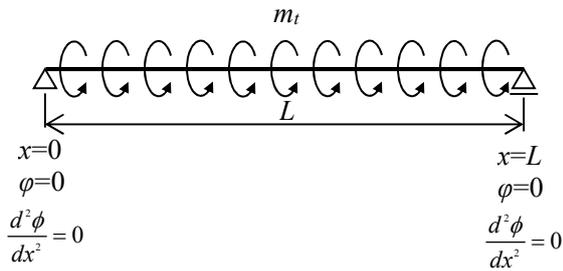


図 2-3-2 等分布ねじり荷重を受ける単純ばり

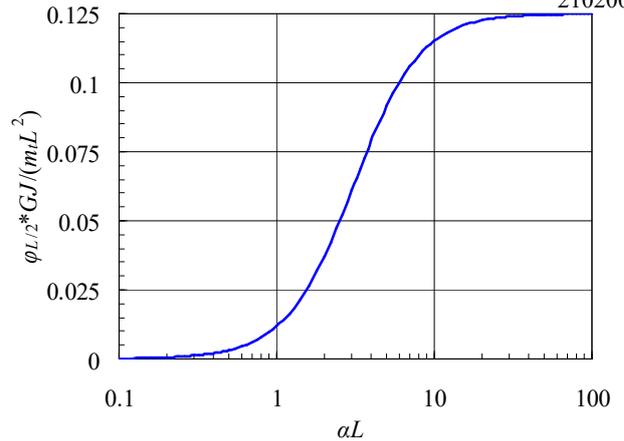


図 2-3-3 スパン中央のねじれ角と  $\alpha L$  の関係

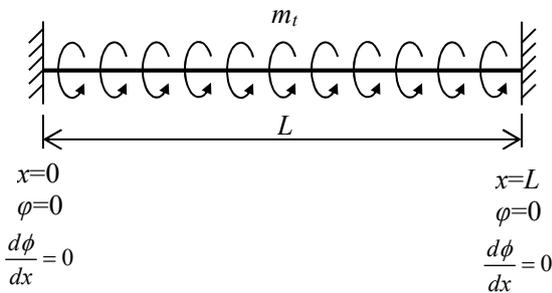


図 2-3-4 等分布ねじり荷重を受ける両端固定ばり

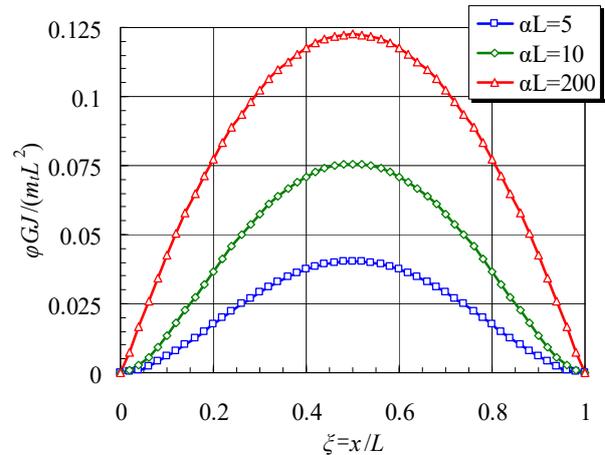


図 2-3-5 両端固定ばりのねじれ角分布

$$\phi = \frac{m_t L^2}{GJ} \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right\} - \frac{1}{(\alpha L)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh \alpha(L/2-x)}{\cosh(\alpha L/2)} \right\} \right] \quad (25)$$

この結果を式(16)に代入することにより, フランジモーメントは

$$M_f = \frac{m_t L^2}{(\alpha L)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh \alpha(L/2-x)}{\cosh(\alpha L/2)} \right\} \quad (26)$$

スパン中央点のねじれ角  $\phi_{L/2}$  は

$$\phi_{L/2} = \frac{m_t L^2}{GJ} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{(\alpha L)^2} \left( 1 - \frac{1}{\cosh \frac{\alpha L}{2}} \right) \right\} \quad (27)$$

と与えられる.  $\phi_{L/2}$  と  $\alpha L$  の関係を図 2-3-3 に示す.  $\alpha L < 1$  の範囲はウラソフねじり (Vlasov torsion),  $\alpha L > 10$  の範囲はサンブナンねじり (St.Venant torsion) と称されている.

### 3) 等分布ねじり荷重を受ける両端固定ばりの変形と断面力

図 2-3-4 のように等分布ねじりモーメント  $m_t$  を満載した両端固定ばりの境界条件は両端固定ばり

$$\begin{aligned}
 x=0 & : \phi=0, \quad \frac{d\phi}{dx}=0 \\
 x=L & : \phi=0, \quad \frac{d\phi}{dx}=0
 \end{aligned}$$

ねじれ角およびフランジモーメントは

$$\phi = \frac{m_i L^2}{GJ} \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{L} - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right\} - \frac{1}{\alpha L} \left\{ 1 - \frac{\cosh \alpha(L/2 - x)}{\cosh(\alpha L/2)} \right\} \frac{1}{2 \tanh(\alpha L/2)} \right] \quad (28)$$

$$M_f = \frac{m_i L^2}{(\alpha L)^2} \left\{ 1 - \frac{\alpha L}{2 \tanh \alpha L} \frac{\cosh \alpha(L/2 - x)}{\cosh(\alpha L/2)} \right\} \quad (29)$$

図 2-35 に両端固定ばりのねじり角分布を示す。そりねじりの特性が強く現れる  $\alpha L$  が小さい範囲では固定端におけるそり拘束の影響が顕著に見受けられるが, St.Venant ねじりが卓越する  $\alpha L$  が大きな領域ではそり拘束の影響は僅少となり, ねじれ角の分布は 2 次の放物線に近くなることが確認できる。

図 2-34 のモデルについて 2 次せん断変形の影響を調べてみよう。境界条件は

$$\begin{aligned} x=0 & : \phi = 0, \quad \frac{d\theta_f}{dx} = 0 \\ x=L & : \phi = 0, \quad \frac{d\theta_f}{dx} = 0 \end{aligned}$$

固定端におけるねじれ率は 0 とはならず, ねじれ率からフランジの 2 次せん断ひずみによるフランジのせん断変形角を引いた値が 0 となる。この境界条件に対する式(23)の解は複雑になるので, 2 次せん断変形の影響が Vlasov ねじりに限定されることを考え, 式(23)を単純化した次式について解を求め, 2 次せん断変形の影響を評価すればよい。

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} = m_i - \kappa \frac{EI_f}{GA_f} \frac{d^2 m_i}{dx^2} \quad (30)$$

この解は 2. 3 で述べたせん断変形を考慮したはりの曲げの解と殆ど同様である。その際, せん断パラメータの評価に注意が必要である。

$$\lambda_s = \frac{\kappa EI_f}{GA_f L^2} \quad (31)$$

開断面ばりのそりねじり特性については文献に詳細なデータが示されている。

## 2. 6 の参考文献

- 1) 小松定夫：薄肉構造物の理論と計算 I, 山海堂, 1969.
- 2) Vlasov.V.Z.(奥村敏恵ほか訳):薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.

## 2. 7 閉断面はりの断面せん断変形 (断面変形)

### (1) はじめに

閉じた鋼薄肉断面はねじりに対する剛性が大きく, 鋼構造物の主要部材として多用されている. このねじりに対する剛性を発揮させるためには断面形状を保持するための隔壁 (ダイアフラム) を適切な間隔で設置する必要がある. 隔壁と同様に, 横桁 (横リブ) 垂直補剛材で構成された横フレームでも条件によっては断面形状を保持する機能を有する. 箱桁の支間長, サイズ, 隔壁間隔などに対応して隔壁等の必要剛性が定まっている.

主構・横構で準閉断面が構成されたトラス桁についても横断面の変形を考慮した設計が必要となる場合がある. ただし, 実際のトラス橋では構造のバランスから考えて, 断面の変形を無視できる場合はほとんど無く, むしろ断面の変形を保持する役割を担っている対傾構の剛性を無視し, 部材力を安全側に評価する方法 (1-0 分配法と称されている) が広く用いられてきた. 現在では立体的な変形を生ずるような荷重に対しては, マトリックス変位法を適用して立体構造としての断面力を用いた設計が行われるようになっている.

本節では, Vlasov の一般化座標法による断面変形理論を解説する. 箱桁の断面変形 (cross-sectional distortion) を表す用語として“ずり”と称する研究者は, “ねじり”の対語として使用していると思われる. 土木用語の中で“ずり”とはトンネル掘削で生ずる岩層を指すので, ここでは“断面変形”と称することにする.

箱桁では, そり応力変化による 2 次せん断応力は板要素の面内で変化するが, Vlasov 理論では要素内のせん断流を一定と見なすので, 曲げに伴うせん断力によるせん断流分布の表現には若干問題である. トラス構造では斜材や横構に対応する要素内ではそり応力が存在しないので, せん断流一定理論を問題なく適用できる.

### (2) 箱形断面はりの断面変形

#### 1) 変位場

骨組部材の一次元化理論においては, 部材の変位は参照点 O の並進変位や回転変位などで記述される. この参照点の力学量として定義される変位を一般化変位, 一般化変位による断面内の変位分布を一般化座標と呼んでいる. Vlasov によって系統的に誘導された薄肉閉断面部材の一次元化理論は特に“一般化座標法”と称されている. 箱形断面は四隅に節点を有するので, 基本的には  $4 \times 3 = 12$  の変位自由度を有している. この内, 部材断面方向の伸縮 (例えば図 2-36 の節点 1 と 2 を結ぶ要素の伸縮) は局所問題であり, これ等を省略すると, 断面の変位自由度は 8 となる. これらを一般化変位で表現すると, 部

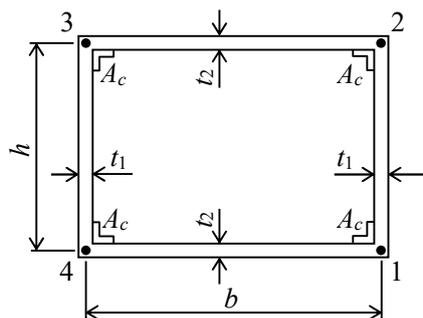


図 2-36 箱形断面

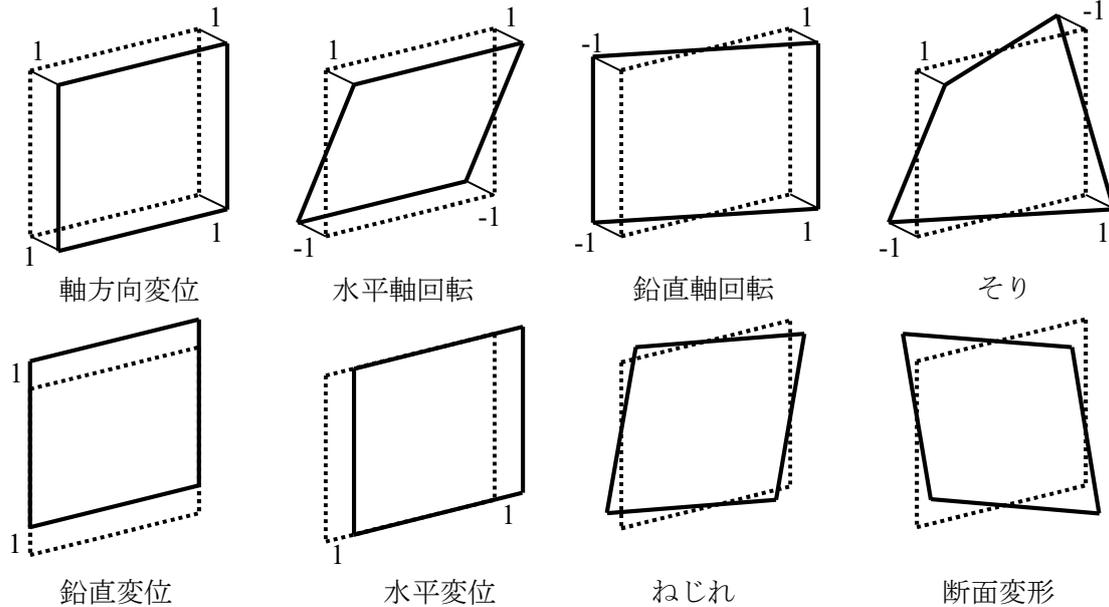


図 2-37 箱形断面の一般化座標

材軸方向に伸縮, そり,  $y$  軸回りの回転,  $z$  軸回りの回転, 部材軸直角方向に  $y$  方向変位,  $z$  方向変位, ねじれ角および断面変形角である. 図 2-37 に示す一般化座標はこれらの一般化変位に対応した変位モードである一般化座標を表している.

Vlasov の原著にはこの 8 個の変位自由度に対する一般化座標法の定式化過程が示され, 8 つの弾性方程式が誘導されている. 断面が 2 軸対称であれば, 部材伸縮 (1 自由度),  $y$  方向たわみ (2 自由度),  $z$  方向たわみ (2 自由度) およびねじれと断面変形 (3 自由度) の 4 群の弾性方程式に分離できる. ここでは断面変形を含むねじれ問題として記述しよう. 図 2-37 の一般化座標の内,  $U_4(s)$ ,  $V_3(s)$ ,  $V_4(s)$  が対象となる.

断面内の任意点の変位成分を一般化変位で表現すると

$$U(x, s) = \omega U_4(s) \tag{1}$$

$$V(x, s) = \varphi V_3(s) + \theta V_4(s) \tag{2}$$

ここに,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  はそれぞれそり, ねじれ角, 断面変形角の軸方向分布を表す. また  $s$  は薄板中心線に沿った変位を表す.

## 2) 仮想仕事の原理

平面弾性問題の応力と変位の関係式より軸方向応力およびせん断応力は

$$\sigma(x, s) = EU_4(s) \frac{\partial \omega}{\partial x} \tag{3}$$

$$\tau(x, s) = G \left\{ \omega \frac{\partial U_4(s)}{\partial s} + V_3(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V_4(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} \tag{4}$$

応力の釣り合い条件は

$$t \frac{\partial \sigma}{\partial x} + t \frac{\partial \tau}{\partial s} = 0 \tag{5}$$

$$t \frac{\partial \tau}{\partial s} + q = 0 \tag{6}$$

ここで, 仮想仕事の原理を適用して, 式(5)については仮想変位  $\omega$  を, 式(6)については仮想変位  $\varphi$  お

よび  $\theta$  を考慮して, 断面について積分を実行する.

$$A_{\omega} \frac{d^2 \omega}{dx^2} - B_1 \omega - B_2 \frac{d\varphi}{dx} - B_1 \frac{d\theta}{dx} + m_{\omega} = 0 \quad (7)$$

$$B_2 \frac{d\omega}{dx} + B_1 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + B_2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + m_t = 0 \quad (8)$$

$$B_1 \frac{d\omega}{dx} + B_2 \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + B_1 \frac{d^2 \theta}{dx^2} - c\theta + m_{\theta} = 0 \quad (9)$$

ここに,

$$A_{\omega} = E \int_F U_4(s) \cdot U_4(s) dF = \frac{EA_e b^2 h^2}{4} + \frac{Eh^2 b^2 (ht_1 + bt_2)}{48}$$

$$B_1 = G \int_F \frac{dU_4(s)}{dx} V_4(s) dF = G \int_F V_3(s) \cdot V_3(s) dF = G \int_F V_4(s) \cdot V_4(s) dF = G(bt_1 + ht_2) \frac{bh}{2}$$

$$B_2 = G \int_F \frac{dU_4(s)}{dx} V_3(s) dF = G \int_F V_3(s) \cdot V_4(s) dF = G(bt_1 - ht_2) \frac{bh}{2}$$

$$c = \frac{8Et_1^3 t_2^3}{ht_1^3 + bt_2^3}, \quad m_{\omega} = \oint p U_4(s) ds, \quad m_t = \oint q V_3(s) ds, \quad m_{\theta} = \oint q V_4(s) ds$$

### 3) 基礎微分方程式

式(7)~(9)はそれぞれ 2 階の微分方程式であるが, 解析的取り扱いを容易にするために, 一つの変位パラメータで表現することを考える.

いま,

$$\frac{d\omega}{dx} = f \quad (10)$$

なる新しい関数  $f$  を考える. なお外力としては分布ねじり荷重  $m_t$  と分布断面変形荷重  $m_{\theta}$  を考える.

$$\theta = \frac{A_{\omega}}{c} \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{m_{\theta}}{c} \quad (11)$$

$$\varphi = \frac{A_{\omega}}{c} \cdot \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{A_{\omega}}{B_2} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{B_1}{B_2} f - \frac{B_1 m_{\theta}}{B_2 c} \quad (12)$$

これらの関係を式(8)に代入して整理すると, ねじりとの連成を考慮した箱桁の断面変形に関する弾性方程式を得る.

$$\frac{d^6 f}{dx^6} - 2r^2 \frac{d^4 f}{dx^4} + s^4 \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{B_2 c m_t}{A_{\omega} (B_1^2 - B_2^2)} + \frac{1}{A_{\omega}} \frac{d^2 m_{\theta}}{dx^2} = 0 \quad (13)$$

$$\text{ここに, } r^2 = \frac{B_2 c}{2(B_1^2 - B_2^2)}, \quad s^4 = \frac{c}{A_{\omega}}$$

この 6 階の微分方程式は閉じた解を有することが知られている.

### 4) 断面力の変位表示

箱桁の断面変形問題に關係する断面力を関数  $f$  で表現すると

ねじりモーメント:

$$T = B_1 \frac{d\varphi}{dx} + B_2 \frac{d\theta}{dx} + B_2 \omega$$

$$= \frac{A_\omega}{c} \cdot \frac{B_1^2 - B_2^2}{B_1} \cdot \frac{d^5 f}{dx^5} + \frac{A_\omega B_2}{B_1} \cdot \frac{d^3 f}{dx^3} - \frac{B_1^2 - B_2^2}{B_2} \cdot \frac{df}{dx} - \frac{B_1^2 - B_2^2}{B_2 c} \cdot \frac{d^2 m_\theta}{dx^2}$$
(14)

横バイモーメント:

$$T_\theta = B_2 \frac{d\varphi}{dx} + B_1 \frac{d\theta}{dx} + B_1 \omega = \frac{d^3 f}{dx^3}$$
(15)

そりモーメント:

$$M_\omega = A_\omega \frac{d\omega}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$
(16)

### 5) 弾性方程式の解

6 階の微分方程式(13)の解は 2 つの係数  $r$  と  $s$  の大小関係により以下の 3 通りに分かれる.

①  $r > s$  の場合,

$$f = C_1 \cosh ax + C_2 \sinh ax + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x + C_5 x + C_6 + \frac{B_2 m_r x^2}{2(B_1^2 - B_2^2)}$$
(17)

ここに,  $\alpha = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}$ ,  $\beta = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}$

②  $r = s = \alpha$  の場合,

$$f = C_1 \cosh ax + C_2 \sinh ax + C_3 x \cosh ax + C_4 x \sinh ax + C_5 x + C_6 + \frac{B_2 m_r x^2}{2(B_1^2 - B_2^2)}$$
(18)

③  $r < s$  の場合,

$$f = C_1 \cosh ax \cdot \sin \beta x + C_2 \cosh ax \cdot \cos \beta x + C_3 \sinh ax \cdot \sin \beta x + C_4 \sinh ax \cdot \cos \beta x + C_5 x + C_6 + \frac{B_2 m_r x^2}{2(B_1^2 - B_2^2)}$$
(19)

ここに,  $\alpha = \frac{\sqrt{s^2 + r^2}}{2}$ ,  $\beta = \frac{\sqrt{s^2 - r^2}}{2}$

### (3) 力学パラメータと構造特性

箱形断面部材の断面変形を含むねじりに関する構造特性を支配する力学パラメータは弾性方程式(13)の特性値である  $rL$  および  $sL$  を選んでも良いが, 他の部材のねじり問題との共通性を考え,

$$P_1 = \sqrt{\frac{GJ}{A_\omega}} L, \quad P_2 = \sqrt{\frac{c}{GJ}} L, \quad P_3 = 1 - \frac{B_2}{B_1}$$
(20)

ここに,  $P_1$ : 薄肉断面ばりのねじり定数比,  $P_2$ : 断面変形に対する抵抗の相対量,  $P_3$ : ウェブとデッキプレート幅厚比関数

なお,  $rL$  および  $sL$  と式(20)のパラメータの間には以下の関係がある.

$$(rL)^2 = \frac{1 - P_3}{2} P_2^2, \quad (sL)^4 = P_1^2 \cdot P_2^2$$

### (4) はりの曲げ理論と断面変形理論のアナロジー

#### 1) せん断変形を考慮した弾性床上のはりの曲げ

式(13)で与えられた箱形断面の断面変形に関する基礎方程式は 6 階の微分方程式である. その中で,

断面変形とそりは切り離せないが、ねじりはこれらの変位とは係数  $b_2$  のみで連成している。この係数  $b_2$  は正方形断面では 0 であり、もう一つの係数  $b_1$  に比べて現象に与える影響が小さい。そこで簡単のために一般断面の場合でも  $b_2=0$  とすると断面変形は以下の 4 階の微分方程式で記述できることになる。

$$A_\omega \frac{d^4\theta}{dx^4} - \frac{A_\omega c}{B_1} \frac{d^2\theta}{dx^2} + c\theta = m_\theta - \frac{A_\omega}{B_1} \frac{d^2m_\theta}{dx^2} \quad (20)$$

この微分方程式は、弾性床上のはりの曲げ(2.8)とアナロジーである。(BEF Analogy: Beam on Elastic Foundation Analogy) 断面変形角をたわみと考えると剛性や断面力も以下のように対応している。

$$\theta - v, \quad A_\omega - EI, \quad c - k, \quad B_1 - \frac{GA}{\kappa}, \quad m_\theta - p$$

## 2) せん断変形を考慮したはりの曲げ

適切な間隔で配置された中間ダイアフラムを有する鋼箱桁を対象とすると、断面変形に対する抵抗は専らダイアフラムが担っており、外郭薄板のラーメン効果は元より横補剛材や垂直材が構成する横ラーメンの効果も無視することができる。このような考えに立つと、断面変形に対する分布バネ  $c$  を無視できることになり、弾性方程式はせん断変形を考慮したはりの曲げ問題となる。(2.3 参照)

$$A_\omega \frac{d^4\theta}{dx^4} = m_\theta - \frac{A_\omega}{B_1} \frac{d^2m_\theta}{dx^2} \quad (21)$$

## 3) はりの曲げ

さらに式(21)においてせん断変形を無視すると、初等はり理論のはりの曲げに関する 4 階の微分方程式となる。

$$A_\omega \frac{d^4\theta}{dx^4} = m_\theta \quad (22)$$

長井らは、このような簡単な力学で断面変形問題、ダイアフラムの必要剛性を検討した論文を発表している。そこでは“BEF Analogy”に対抗して“BEAM Analogy”と称している。

## 2. 7 の参考文献

- 1) Vlasov.V.Z. (奥村敏恵ほか訳)：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967.
- 2) 坂井藤一・長井正嗣：鋼箱桁の中間ダイアフラム設計法に関する研究，土木学会論文集，No.261，1976.
- 3) 小松定夫・長井正嗣：中間ダイアフラムの新しい設計法に関する研究，土木学会論文集，No.326，1982.

## 2.8 弾性床上的はり

### (1) はじめに

はり部材が連続したバネによって支持された構造を弾性床上的のりと称している. このような構造モデルと考えると変位や応力あるいは弾性座屈強度を評価する方法はコンピュータ時代の遙かに前から行われてきた. 鉄道レール軌道はレールがはり, 枕木と道床をばねと見なす. 地盤に打ち込まれた杭の側方変形解析では, 鋼管をはり, 地盤を連続バネと見なす. また, ポニートラスと称される上弦材同士を直接連結せず, 横フレームによって弾性支持した構造の座屈強度解析では, 圧縮弦材をはり, 横フレームを密に配置されたバネと見なすモデル化が行われている.

この節では, せん断変形を考慮した弾性床上的のりの弾性方程式の誘導過程, 弾性方程式の解法と幾つかの事例について構造特性を解説する.

### (2) 弾性方程式の誘導と解法

#### 1) 変位場

“2.3 せん断変形を考慮したはりの曲げ”において考慮した変位場と共通である.

以下の誘導において必要となる関係式のみ再掲すると,

$$\theta = \frac{dv}{dx} - \gamma \tag{1}$$

$$\gamma = \frac{\kappa Q}{GA} \tag{2}$$

#### 2) 断面力と外力およびバネ反力の釣り合い

図2-38に示す, 微小区間  $dx$  における断面力, 外力およびバネ反力の釣り合いより

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -p + kv \tag{3}$$

ここに,  $k$ : 単位長さ当たりのバネ剛性を表す.

式(3)より

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p + kv \tag{4}$$

#### 3) 弾性方程式とその解

せん断変形を考慮する場合の曲げモーメントと曲率の関係から

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx} = -EI \left( \frac{dv}{dx} - \frac{\kappa}{GA} \frac{dQ}{dx} \right) = -EI \left\{ \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{\kappa}{GA} (p - kv) \right\} \tag{5}$$

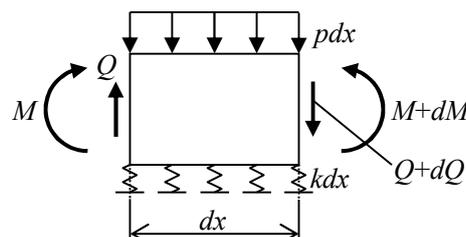


図2-38 微小区間における断面力, 外力およびバネ力の釣り合い

式(5)を式(4)に代入して整理すると

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{\kappa EI k}{GA} \frac{d^2 v}{dx^2} + kv = p - \frac{\kappa EI}{GA} \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (6)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - 2r^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + s^4 v = \frac{p}{EI} - \frac{\kappa}{GA} \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (7)$$

$$\text{ここに, } r^2 = \frac{\kappa k}{2GA}, \quad s^4 = \frac{k}{EI}$$

せん断変形を無視できる場合は

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = p \quad (8)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4a^4 v = \frac{p}{EI} \quad (9)$$

$$\text{ここに, } a^4 = \frac{k}{4EI}$$

となる.

弾性方程式(7)の一般解は,  $r$  と  $s$  の大小関係により, 以下の 3 通りとなる.

$r > s$  の場合

$$v = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 \cosh \beta x + C_4 \sinh \beta x \quad (10)$$

$$\text{ここに, } \alpha = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}, \quad \beta = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}$$

$r = s = \alpha$  の場合

$$v = C_1 \cosh \alpha x + C_2 \sinh \alpha x + C_3 x \cosh \alpha x + C_4 x \sinh \alpha x \quad (11)$$

$r < s$  の場合

$$v = C_1 \cosh \alpha x \sin \beta x + C_2 \cosh \alpha x \cos \beta x + C_3 \sinh \alpha x \cos \beta x + C_4 \sinh \alpha x \sin \beta x \quad (12)$$

$$\text{ここに, } \alpha = \sqrt{(s^2 + r^2)/2}, \quad \beta = \sqrt{(s^2 - r^2)/2}$$

弾性方程式(9)の一般解は

$$v = C_1 \sinh \alpha x \sin \alpha x + C_2 \sinh \alpha x \cos \alpha x + C_3 \cosh \alpha x \sin \alpha x + C_4 \cosh \alpha x \cos \alpha x \quad (13)$$

### (3) 力学パラメータ

弾性床上のはりの曲げに関する力学パラメータは, 弾性床のバネ剛性  $k$ , はりの曲げ剛性  $EI$  および支間長  $L$  によって表される,

$$\Omega = \frac{kL^4}{EI} \quad (14)$$

とせん断パラメータ  $\lambda_s$  である.

はりのたわみに対する弾性バネの拘束効果は, パラメータ  $\Omega$  を介して把握しておくといよい.

集中荷重を受ける弾性床上の単純ばりの支間中央におけるたわみは

$$v(0) = \frac{PL^3}{8EI} \cdot \frac{\sinh \alpha L \cosh \alpha L - \sin \alpha L \cos \alpha L}{(\alpha L)^3 (\sin^2 \alpha L \sinh^2 \alpha L + \cos^2 \alpha L \cosh^2 \alpha L)} \quad (15)$$

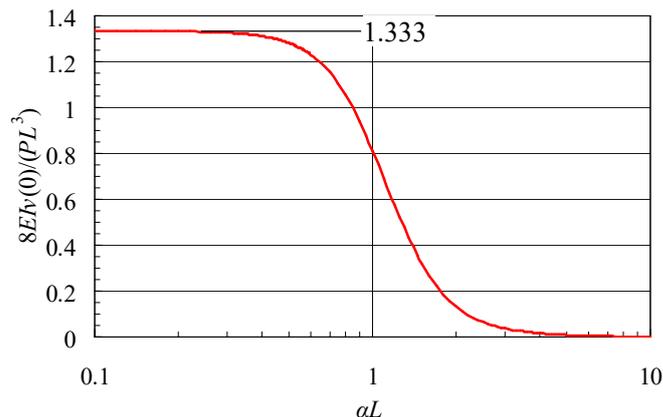


図2-39 弾性床上の単純ばりのたわみ

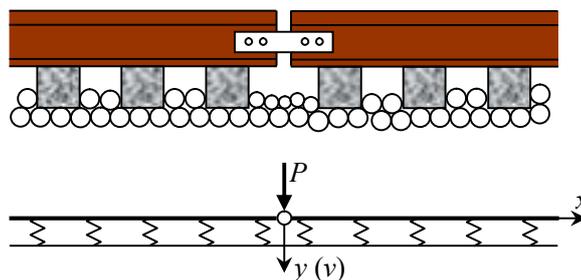


図2-40 軌道レール継目のモデル化

と表される。

図2-39は  $v(0)$  の無次元表示した値とパラメータ  $\alpha L$  の関係を表したもので、 $\alpha L$  が 0.4 より小さいとスパン長  $2L$  のはりの midpoint のたわみの  $1/6$  に (図上では  $8/6=1.333$ )、 $\alpha L$  が 1 を越えるとたわみは急減して 4 を越えると 0 に収束する。弾性床上のはりの曲げ問題ではパラメータ  $\alpha L$  が 0.4~4 の間ではりと床の剛性に依存する分配効果を考慮することになる。前述の力学パラメータ  $\Omega$  で評価するとこの範囲は  $0.1 < \Omega < 10^3$  となる。

(4) 事例研究

1) 鉄道レールの変位と応力

砕石の道床と枕木で支持された鉄道軌道は、弾性床上のはりとしてモデル化される典型的な構造である。図2-40は継ぎ目部のレールの弾性変形を評価するためのモデルで、無限遠で変位が発散しない条件から弾性方程式(9)の一般解として

$$v = C_1 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + C_2 e^{-\alpha x} \cos \alpha x \tag{16}$$

を用いる。

境界条件として、 $x=0$  において  $d^2v/dx^2=0$  および  $d^3v/dx^3=P/2EI$  を満たすように積分定数を定めると

$$v = \frac{PL^3}{4EI} \cdot \frac{e^{-\alpha x} \cos \alpha x}{(\alpha L)^3} \tag{17}$$

となる。弾性床の剛性が高くなるとレールの変形は継ぎ目近傍の局所的なものとなる。枕木を連続するバネとみなすモデル化が妥当であるか検証する必要があることに留意されたい。特に直結軌道など剛性の高い軌道においては重要である。変形が局所的である場合レールの曲げに伴うせん断変形を考慮することも必要である。

2) 地盤に打ち込まれた杭の変位

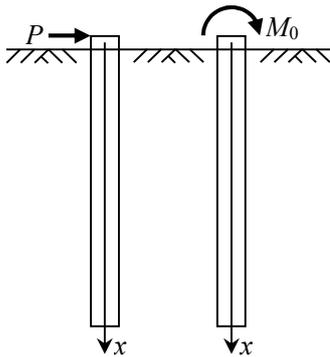


図 2-4 1 杭頭に荷重を受ける支持杭

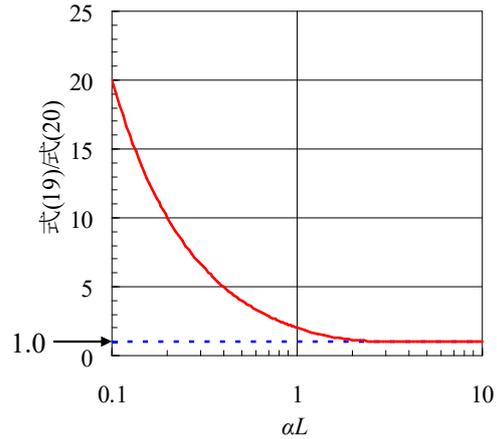


図 2-4 2 杭長が半無限長と見なせるパラメータ  $\alpha L$

地上部に部材軸に直角方向の外力を受ける杭の変形や断面力は, 設計では弾性地盤反力法によることが多い. その際に基本となる杭の変形計算法に用いられるモデルは, 図 2-4 1 のように上端に集中荷重と集中モーメントを受け, 杭の地中部分は地盤による側方拘束を受けるものとして弾性床上のはりとして取り扱われる. 2つの荷重ケースに対する変位の解は, 弾性方程式(9)から以下のように与えられる. なお, 杭構造の場合, 曲げに伴うせん断変形は無視することが一般的である.

集中荷重 P

有限長  $L$  の杭が全長に亘り地盤の中に打ち込まれており, 地表の上端に水平横荷重  $P$  が作用するとき, 式(13)の積分定数を杭両端の境界条件

$$x = 0 : \frac{d^2v}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3v}{dx^3} = \frac{P}{EI}$$

$$x = L : \frac{d^2v}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3v}{dx^3} = 0$$

のもとで決定するとたわみは

$$v = \frac{PL^3}{2EI} \cdot \frac{\{\sinh 2\alpha L \cos \alpha x \sinh \alpha x + \sin 2\alpha L \sin \alpha x \cosh \alpha L + (\sin \alpha L \cos \alpha L - \sinh \alpha L \cosh \alpha L) \cos \alpha x \cosh \alpha x\}}{(\alpha L)^3 (\sin^2 \alpha L - \sinh^2 \alpha L)} \quad (18)$$

杭頭 ( $x=0$ ) におけるたわみは

$$v(0) = \frac{PL^3}{2EI} \cdot \frac{\sin \alpha L \cos \alpha L - \sinh \alpha L \cosh \alpha L}{(\alpha L)^3 (\sin^2 \alpha L - \sinh^2 \alpha L)} \quad (19)$$

$\alpha L$  が大きくなると

$$v(0) = \frac{PL^3}{2EI(\alpha L)^3} \quad (20)$$

となる. この問題を杭が半無限長と見なせる場合の解

$$v = \frac{PL^3}{2EI} \cdot \frac{e^{-\alpha x} \cos \alpha x}{(\alpha L)^3} \quad (21)$$

の杭頭における変位は, 式(20)と一致している. 図 2-4 2 は杭頭における水平変位についてパラメータ  $\alpha L$  と式(19)/式(20)の関係を表しており, 杭の長さを半無限と見なせる限界は  $\alpha L > 2$  であることを示している.

集中モーメント  $M_0$

同様に杭頭に集中モーメントを受ける場合の半無限長の杭のたわみは

$$v = -\frac{M_0 L^2}{2EI} \cdot \frac{e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x)}{(\alpha L)^2} \quad (22)$$

### 3) ポニートラス上弦材の座屈

この問題では弦材は比較的にスレンダーであり, その座屈現象においてはせん断変形の影響は僅少である. そこで基礎方程式(9)を考えることとし, これに軸圧縮力の項を導入する.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + N \frac{d^2 v}{dx^2} + kv = 0 \quad (23)$$

軸圧縮力  $N$  が一定で弦材の横方向変位を拘束する U フレームの効果により, 座屈長はスパン長  $L$  よりかなり小さい  $S$  とする. 座屈モード  $v$  および座標関数  $v_m$  を

$$v = a \sin\left(\frac{\pi x}{S}\right), \quad v_m = \sin\left(\frac{\pi x}{S}\right) \quad (24)$$

として式(23)にガラーキン法を適用する.

$$\int EI \frac{d^4 v}{dx^4} v_m dx + \int N \frac{d^2 v}{dx^2} v_m dx + \int kv v_m dx = 0$$

式(24)を代入すると

$$EI \left(\frac{\pi}{S}\right)^4 \int a \sin^2\left(\frac{\pi x}{S}\right) dx - N \left(\frac{\pi}{S}\right)^2 \int a \sin^2\left(\frac{\pi x}{S}\right) dx + k \int a \sin^2\left(\frac{\pi x}{S}\right) dx = 0$$

座屈条件式は

$$EI \left(\frac{\pi}{S}\right)^4 - N \left(\frac{\pi}{S}\right)^2 + k = 0 \quad (25)$$

と与えられる. 座屈長  $S$  は座屈荷重を最小にする条件より

$$\frac{dN}{dS} = 2 \left(\frac{\pi}{S}\right)^2 EI \left\{ \frac{2kS^3}{EI\pi^4} - \frac{1}{S} \left(1 + \frac{kS^4}{EI\pi^4}\right) \right\} = 0$$

$$S^4 = \frac{EI\pi^4}{k} \quad (26)$$

スパン長  $L$  で無次元表示した座屈長  $S/L$  は以下の式で表される.

$$\frac{S}{L} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{\Omega}}$$

式(25)に代入して座屈荷重は

$$N_{cr} = 2\sqrt{kEI} \quad (27)$$

式(27)はあくまで定性的なパラメータの効果を評価するために有効であり, 精度に関しては様々な制約があるので, 適用に当たっては注意が必要である. 座屈長がスパン長  $L$  に近い場合, 支点における拘束条件が影響してくる. 逆に, 座屈長が短くなると, U フレームを連続したバネと見なすモデル化に限界がある. また, 軸圧縮力を一定としているが実際のトラスでは軸力は変化する. これらの条件を全て満足する解析法は, マトリックス変位法による弾性座屈解析, あるいは有限変位解析によらなければならない. 参考文献 2)にはそのような解析法によって計算された, ポニートラスの圧縮弦材の耐荷力特性が説明されている.

## 2. 8の参考文献

- 1) Hawranek,A. und Steinhardt,A.:橘善雄、小松定夫訳：鋼橋の理論と計算，山海堂，1965.
- 2) 土木学会鋼構造委員会：座屈設計ガイドライン，2005.

## 2. 9 吊橋の膜理論

### (1) はじめに

吊橋は主ケーブル, 塔, アンカレッジ, 吊材, 補剛桁で構成され, 両側のアンカレッジで固定し塔頂を張り渡したケーブルから吊材によって補剛桁を支えた構造を基本とする. 今日ではこのような吊橋の構造解析は有限変位を考慮したマトリックス変位法で処理される. しかし, 長大吊橋の建設が始まった 19 世紀にはマトリックス変位法の理論は無く, たとえ有ったとしても多元連立方程式を解くためのコンピュータが開発されたのは 20 世紀後半であった. それでは先人はどのような構造解析法を用いて吊橋の設計を行ったのであろうか. それはこの節で説明する膜理論による近似計算法を巧みに利用したのであった.

吊橋の膜理論とは, 一定間隔に配置される吊材を連続した膜と見なすことから名付けられた. 鉛直荷重を受ける場合の変位について Melan が発表した撓度理論 (Deflection Theory)<sup>1)</sup> はたわみ変形におけるケーブルの橋軸方向変位に起因する復元力 (死荷重のバランス) を考慮したもので, 今日でも通用する理論である.

水平たわみに関する膜理論としては, Moisseiff<sup>2)</sup>によって誘導された吊材の傾斜による復元力を考慮したケーブルと補剛桁間の分担せん断力に関する弾性分配法が有力である.

吊橋のねじりに関する理論は, 補剛桁構造がトラス形式か桁形式かによって異なる. さらに桁形式の場合, 閉断面か開断面かによって弾性方程式が異なる. 最も簡単な弾性方程式は閉断面補剛桁を有する吊橋で, 設計対象となる現象のほとんどが, 単純ねじり理論で記述できる. 補剛桁構造の断面が 2 主構と上下横構で構成される箱形のトラス構造の場合も巨視的には単純ねじり理論で表現できるが, 補剛トラスが連続構造であったり, 高次固有振動モードに関わる現象についてはそりねじりや断面変形を含む拡張理論が必要となる.

今日ではこのような古典的理論が実橋梁の設計において主役となることはない. 橋軸方向に変化する剛性や死荷重, 必ずしも膜理論の成立条件とは一致しない実構造の支持条件などを忠実に考慮するにはマトリックス変位法を適用するのがベストである. それでもマトリックス変位法で計算された結果を力学的に解釈するために, 膜理論の特長を活用して, 力学パラメータと力学的挙動の関係を整理すると力学現象をより深く理解することができる.

### (2) 鉛直たわみ理論

吊橋の鉛直たわみに関する膜理論を説明する.

#### 1) 仮定

弾性方程式を誘導する際に, 以下の仮定を設ける.

- ① 吊材は密に配置されており, 膜と見なすことができる.
- ② 吊材の伸びは無視できるものとする. 従って, ケーブルと補剛桁の鉛直変位は等しい.
- ③ 吊材の傾斜の影響は小さいものとする.
- ④ ケーブルは可とう性で曲げモーメントやせん断力を伝達しない.
- ⑤ 死荷重は橋軸方向に等分布するものとし, 全てをケーブルが担うものとする. 従って, ケーブルの初期形状は 2 次の放物線をなすと仮定する.

ケーブルの自重はケーブルの軸線に沿って等分布するから, 吊構造重量が作用する前のケーブル形状

はカテナリー曲線である。吊構造重量が作用した後は、カテナリー曲線と2次放物線の間形状である。スパン長が短い小規模の吊橋ではケーブル重量に比べて吊構造重量が卓越するから、ケーブル形状は2次放物線に近く、長大スパンになるほどケーブルと吊構造の重量が近づくので、ケーブル形状は2次放物線にカテナリー曲線の特性が加わってくる。吊橋の構造特性を議論する場合は2次放物線と仮定しても大きな問題はないが、吊橋の架設計算や形状管理においては実際の形状を反映したマトリックス変位法が用いられる。

2) ケーブルにおける釣り合い (図2-43)

ケーブルの微小区間  $dx$  に作用する  $y$  方向の力の釣り合い条件より

$$-(H_d + H_p) \left( \frac{dy}{dx} + \frac{dv}{dx} \right) + (H_d + H_p) \left\{ \frac{d(y + \Delta y)}{dx} + \frac{d(v + \Delta v)}{dx} \right\} + \{m_c + S(x)\} dx = 0$$

ここに、 $H_d$ : 死荷重によるケーブル張力の水平成分、 $H_p$ : 活荷重によるケーブル張力の水平成分、 $y$ : ケーブル形状、 $v$ : 活荷重による鉛直変位、 $m_c$ : 単位水平長当たりのケーブル重量、 $S(x)$ : 単位長さ当たりの吊材力。

両辺を  $dx$  で除して

$$S(x) = -(H_d + H_p) \left( \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2} \right) - m_c \tag{1}$$

3) 補剛桁における釣り合い (図2-44)

補剛桁の微小区間  $dx$  に作用する鉛直方向の力の釣り合い条件より

$$\{-S(x) + m_s + p\} dx - Q + Q + dQ = 0$$

ここに、 $m_s$ : 単位長さ当たりの補剛桁重量、 $p$ : 単位長さ当たりの活荷重強度。

曲げモーメントとせん断力の関係および曲げモーメントと曲率の関係より

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} + S(x) = p + m_s \tag{2}$$

ここに、 $EI$  は吊構造の鉛直たわみに関する曲げ剛性を表す。

4) 基礎微分方程式

式(1)および(2)より  $S(x)$  を消去して整理すると

$$EI \frac{d^4v}{dx^4} - (H_d + H_p) \frac{d^2v}{dx^2} = p + H_p \frac{d^2y}{dx^2} \tag{3}$$

式(3)の左辺第2項は変位  $v$  と変位によって発生するケーブル張力の水平成分  $H_p$  の積を含んでおり、非線形方程式である。そのため以下に示すケーブル方程式と協働して、試行錯誤的 (try and error) に解を求めることになる。

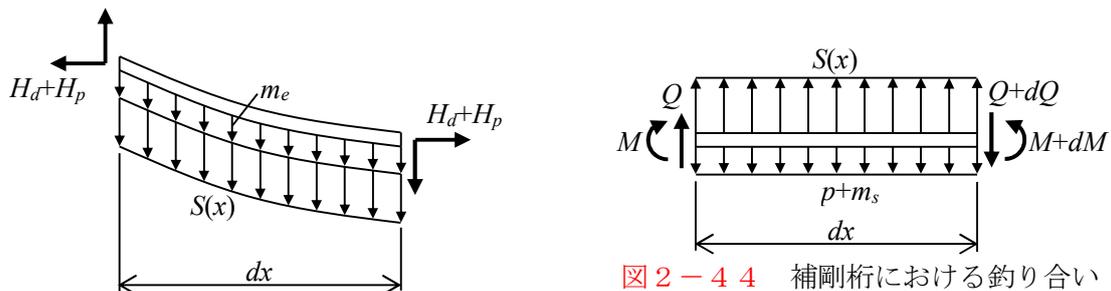


図2-43 ケーブルにおける釣り合い

図2-44 補剛桁における釣り合い

5) ケーブル方程式

ケーブルは両端のアンカーにおいて固定されているから, 活荷重によって変位を生じた場合でもアンカー間の水平距離は変わらないと言う拘束条件が課せられる. ケーブルは  $y$  なる放物線で垂れており, これに  $v$  なる鉛直変位が加わったとき, ケーブルの全長にわたる線積分により,

$$H_p = -\frac{E_c F_c}{L_c} \frac{d^2 y}{dx^2} \int v dx \tag{4}$$

ここに,  $E_c F_c$ : 主ケーブルの伸び剛性,  $L_c$ : 主ケーブルの等価長さ,  $y$ : ケーブルの形状.  
これをケーブル方程式と称している.

6) 基礎方程式の解

図 2-45 に示すストレートバックステイを有する単径間吊橋が等分布荷重を満載した状態について, 式(3)および式(4)により閉じた解を表現すると,

$$v = \left( p + H_p \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \frac{L^2}{H} \left[ \frac{x}{2L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) - \frac{1}{(aL)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh a(L/2-x)}{\cosh aL/2} \right\} \right] \tag{5}$$

$$H_p = -\frac{E_c F_c}{L_c} \frac{d^2 y}{dx^2} \left( p + H_p \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \frac{L^2}{H} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{(aL)^2} \left( 1 - \frac{\tanh aL/2}{aL/2} \right) \right\} \tag{6}$$

式(6)の右辺にはケーブル付加張力の水平成分が含まれているので非線形問題である. 従って **try and error** で数値計算することになる. 効率的に非線形計算を行うにはケーブル付加張力水平成分の 2 つの仮定値  $H_{p1}$  および  $H_{p2}$  に対して, 式(6)により計算値  $H_{p1}$  および  $H_{p2}$  を求める. 補間計算により

$$H_{p0} = -\frac{H_{p1} H_{p2} - H_{p11} H_{p1}}{H_{p1} - H_{p11} - H_{p1} + H_{p2}}$$

より精度を上げるにはこの計算を繰り返せばよい.

図 2-45 の各種の荷重状態に対するたわみと曲げモーメントおよびケーブル付加水平張力は以下のように与えられる.

Case-A

$$0 \leq x < a$$

$$v = \frac{pL^2}{2H} \left\{ \frac{b-a}{L} \left( 1 - \frac{a+b}{2L} \right) \frac{x}{L} - \frac{\cosh ab - \cosh aa}{(aL)^2 \sinh aL} \sinh a(L-x) \right\}$$

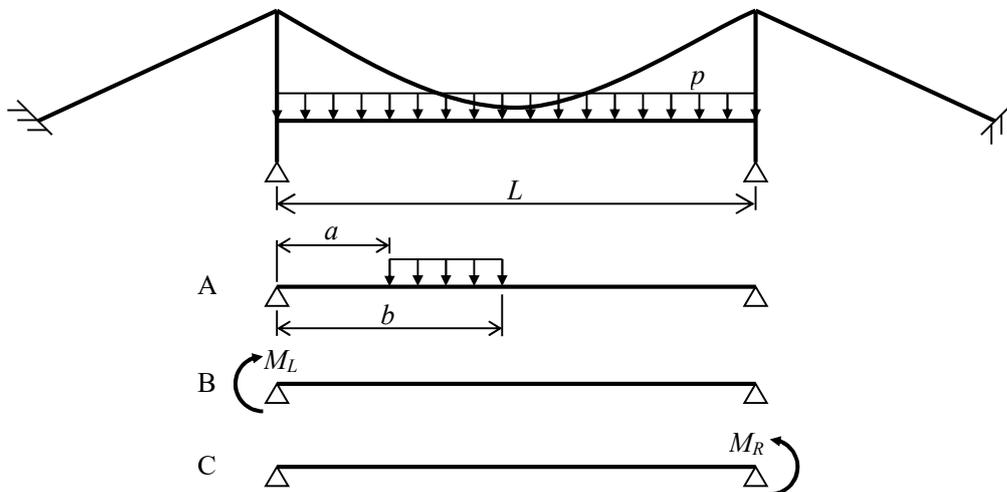


図 2-45 吊橋モデルと荷重状態

$$M = \frac{pL^2}{(aL)^2} \frac{\cosh a(L-a) - \cosh a(L-b)}{\sinh aL} \sinh ax$$

$$a \leq x \leq b$$

$$v = \frac{pL^2}{2H} \left\{ \frac{b-a}{L} \left( 1 - \frac{a+b}{2L} \right) \frac{x}{L} - \frac{x-a}{2L} \right\} - \frac{pL^2}{2H} \frac{1}{(aL)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh a(L-b) \sinh ax - \cosh aa \sinh a(L-x)}{\sinh aL} \right\}$$

$$M = \frac{pL^2}{(aL)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh a(L-b) \sinh ax - \cosh aa \sinh a(L-x)}{\sinh aL} \right\}$$

$$b < x \leq L$$

$$v = \frac{pL^2}{2H} \left\{ \frac{b-a}{L} - \frac{a+b}{2L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) - \frac{\cosh ab - \cosh aa}{(aL)^2} \sinh a(L-x) \right\}$$

$$M = \frac{pL^2}{(aL)^2} \frac{\cosh ab - \cosh aa}{\sinh aL} \sinh a(L-x)$$

$$D = \frac{pL^3}{2H} \left\{ \frac{(3-2b/L)(b/L)^2}{12} - \frac{(3-2a/L)(a/L)^2}{12} \right\} - \frac{pL^3}{2H} \left\{ \frac{b-a}{L} - \frac{\sinh a(L/2-a) - \sinh a(L/2-b)}{(L/2) \cosh ab} \right\}$$

### Case-B

$$v = \frac{M_L}{2H} \left\{ 1 - \frac{x}{L} - \frac{\sinh a(L-x)}{\sinh aL} \right\}$$

$$M = M_L \frac{\sinh a(L-x)}{\sinh aL}$$

$$D = \frac{M_L}{4H} \left( 1 - \frac{2 \tanh aL/2}{aL} \right)$$

### Case-C

$$v = \frac{M_R}{2H} \left( \frac{x}{L} - \frac{\sinh ax}{\sinh aL} \right)$$

$$M = M_R \frac{\sinh ax}{\sinh aL}$$

$$D = \frac{M_R}{4H} \left( 1 - \frac{2 \tanh aL/2}{aL} \right)$$

なお何れの荷重状態においても、ケーブルの付加水平張力による上揚力がスパン全長に亘り作用しているため、式(5)、(6)に倣ってこれを考慮する。これらの式を中央径間および側径間に適用し、ケーブル方程式と組み合わせることによって、2 ヒンジ吊橋および連続吊橋の変形や断面力を求めることができる。連続吊橋の場合は中間支点における補剛桁のたわみ角の連続条件を満たすように、支点モーメント  $M_1$  および  $M_2$  に関する連立方程式を case-B および case-C により作成する。

#### 7) 力学パラメータと構造特性

上式には2つの力学パラメータと位置パラメータ  $x/L$  が含まれている。

$P_1 = L \sqrt{\frac{H_d}{EI}}$  : Steinman 定数と称される吊橋の特徴を表す最も基本的な力学パラメータで、鉛直

たわみにおけるケーブル初期張力による復元力と補剛桁の曲げ剛性による復元力の比を表している。

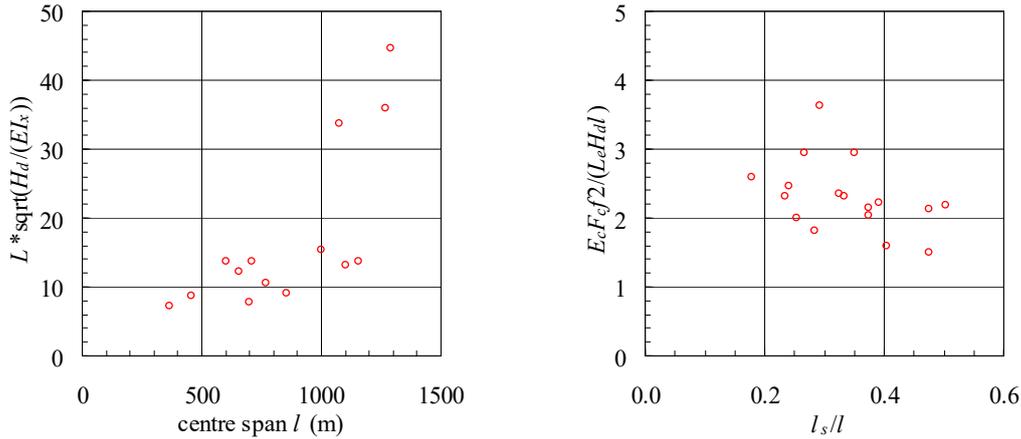


図 2-46 実橋における鉛直たわみに関する力学パラメータの分布

$P_2 = \frac{E_c F_c f^2}{L_c H_d L}$  : ケーブルの伸び剛性と死荷重による水平張力の比に関する力学パラメータ.

図 2-46 のように, これらの力学パラメータの実橋の値を中央径間長に対してプロットした.  $P_1$  は中央径間長に対して相関性が高く, 500m 級吊橋ではおよそ  $P_1=10$ , 1000m 級吊橋では  $P_1=15 \sim 20$  である.  $P_2$  は中央径間長との相関は低く, 2~3 の間に分布している.

パラメータ  $P_1$  は吊橋の鉛直たわみに関する 2 つの剛性, すなわち補剛桁の曲げ剛性と主ケーブルの復元力のバランスに関係している. 中央径間長が 1000m を越える長大吊橋では補剛桁の剛性の寄与は小さいが, 局所的な荷重に対してこれを分散する効果を担っている. 荷重 case-A の荷重載荷区間を変えて特性を調べると, このことが理解できる.

基礎方程式(3)では曲げに伴うせん断変形の影響を無視している. 径間長が大きい吊橋では補剛構造がトラスであってもせん断パラメータは  $10^{-2}$  よりも小さく, せん断変形は一般に無視できるが, 補剛構造が連続トラスの場合, 中間支点において急激に増加する曲げモーメントはせん断変形を無視した膜理論では過大に評価してしまう. そのような特性がせん断変形を考慮した膜理論を用いた参考文献 3)で紹介されている.

### (3) 水平たわみ理論

#### 1) 変位自由度

風荷重を受ける吊橋では風方向の抗力成分以外に揚力や空力モーメント成分の荷重も作用するが, ここでは抗力成分のみを対象に考える. 水平横荷重を受ける吊橋の横たわみに関する弾性方程式の誘導において考慮される変位は, 扁平な薄肉断面の補剛桁であれば, ケーブルの水平横変位, 補剛桁の横変位および補剛桁の鉛直軸回りの回転角の 3 自由度である. これに対して主構高さの大きい補剛トラスの場合は吊材の傾斜に伴う吊材力の水平成分が補剛トラスにねじり荷重としても作用することを考慮に入れると, 上記の 3 変位自由度のほか, 補剛桁のねじれ角など付加的な変位が関与する. 補剛トラスを有する吊橋で付加的なねじりとの連成を考慮した解析法と構造特性については文献 4)を参考にされたい. ここでは 3 変位自由度の弾性方程式の場合を扱う.

#### 2) 弾性方程式 (図 2-47)

ケーブルと補剛桁に作用する横荷重はケーブルの復元力, 補剛桁の復元力以外にケーブルと補剛桁の

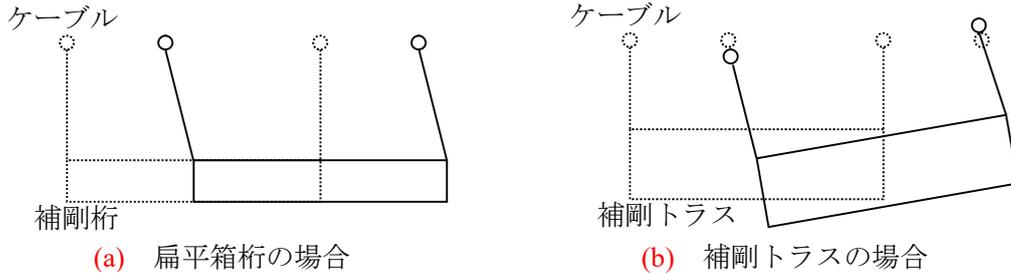


図 2-47 水平横たわみにおける吊橋の変位

水平変位差と吊材長に関する吊材傾斜角に応じて, ケーブルと補剛桁とに弾性的に分配される. この原理は Moisseiff の弾性分配法として知られている.

ケーブルにおける水平力の釣合いより

$$-H_d \frac{d^2 w_c}{dx^2} - \frac{m_s}{\eta} (w_s - w_c) = p_c \quad (7)$$

補剛桁における水平力の釣り合いより

$$-EI_z \frac{d^4 w_s}{dx^4} + \frac{m_s}{\eta} (w_s - w_c) = p_s \quad (8)$$

ここに,  $H_d$ : 死荷重によるケーブル水平張力,  $EI_z$ : 補剛桁の鉛直軸回り曲げ剛性,  $m_s$ : 補剛桁重量,  $\eta$ : 吊材長,  $w_c$ : ケーブル水平変位,  $w_s$ : 補剛桁水平変位,  $p_c$ : ケーブルに作用する風荷重,  $p_s$ : 補剛桁に作用する風荷重.

吊材長  $\eta$  は橋軸方向に変化する量であり, 式(7)および(8)は変数係数の連立微分方程式である. 従って閉じた解を求めることは困難であり, 級数解法等の近似計算法を適用する必要がある.

### 3) 弾性方程式の解法

ここでは, 吊構造およびケーブルの水平変位の差を吊材長で除した吊材傾斜角を級数で仮定する Selberg の解法<sup>5)</sup>を説明する.

吊材傾斜角  $\beta$  は

$$\beta = \frac{w_s - w_c}{\eta} = \sum a_n \sin\left(\frac{nx}{L}\right) \quad (9)$$

ここに, 中央径間:  $\eta = h_T - 4f \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right)$

側径間:  $\eta = h_T \frac{x}{L_s} - 4f_s \frac{x}{L_s} \left(1 - \frac{x}{L_s}\right)$

$h_T$ : 主塔高 (補剛桁上),  $f$ : 中央径間のケーブルサグ,  $f_s$ : 側径間のケーブルサグ,  $L$ : 中央径間長,  $L_s$ : 側径間長

式(7)および(8)は

$$\frac{d^2 w_c}{dx^2} = -\frac{p_c}{H_d} - \frac{m_s}{H_d} \sum a_n \sin\left(\frac{nx}{L}\right) \quad (10)$$

$$\frac{d^4 w_s}{dx^4} = \frac{p_s}{EI_y} - \frac{m_s}{EI_y} \sum a_n \sin\left(\frac{nx}{L}\right) \quad (11)$$

吊構造が両支点において水平たわみに関して単純支持されている場合を考える. ケーブルには等分布横荷重満載, 補剛桁には任意載荷長の等分布横荷重が作用しているとすると, 式(10)および式(11)の解は

以下のように表される.

$$w_c = -\frac{p_c L^2}{2H_d} \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \frac{m_s}{2H_d} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \sum \frac{a_n}{n^2} \sin\left(\frac{nx}{L}\right) \quad (12)$$

$$w_s = w_{s0} - \frac{m_s}{2EI_y} \left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \sum \frac{a_n}{n^4} \sin\left(\frac{nx}{L}\right) \quad (13)$$

ここに,  $w_{s0}$  は補剛桁に作用する横荷重による単純桁としてのたわみを表す.

吊材傾斜角に含まれる未定係数  $a_n$  は以下の適合条件によって決定する.

$$w_s(x_i) - w_c(x_i) = \eta(x_i) \sum a_n \sin\left(\frac{nx_i}{L}\right) \quad (n=1,2,\dots,N) \quad (14)$$

ここに,  $\eta(x_i)$  はスパン長の  $N+1$  等分点の  $x$  座標値である.

ここで説明した Selberg の解法以外にケーブルおよび補剛桁の水平横変位を三角級数で表現してガラーキン法を適用する解法もある. その解法では変位の収束性は問題ないが, 変位の導関数で与えられる断面力の収束性はあまり良くない. その点, Selberg の解法のように吊材の傾斜角を級数表示する方法では外力による曲げモーメントやせん断力を微分方程式の解として正確に求めることができるので, 変位の収束性に劣らず断面力の収束性も良好である.

#### 4) 力学パラメータと構造特性

吊橋の水平横たわみに関する力学パラメータは

- $P_4 = L \sqrt{\frac{H_d}{EI_y}}$  : ケーブルの復元力と補剛桁の曲げ剛性に関するパラメータで, 実橋では中央径間長 500m 級では 2~3, 1000m 級では 5~6 に分布している.

- $P_5 = \frac{m_s L^3}{EI_y}$  : 吊材の傾斜による吊材張力の水平成分に関するパラメータで補剛桁とケーブル間の水平力の移行量に関する.

- この他, 吊材の長さに関する形状パラメータもあるが変位や断面力に対する影響は僅少である.

一般に中央径間の補剛桁に作用する水平横荷重の一部は吊材の傾斜した吊材を通じてケーブルに伝わり, 残りは補剛桁のせん断力として支点に伝わる. 支間長が大きくなると相対的にケーブルの死荷重張力による復元力が補剛桁の曲げ剛性より大きくなるのでパラメータ  $P_4$  が増大し, 水平横荷重のケーブル分担率が増す. 側径間については支間長が短い場合は, 水平横荷重の補剛桁分担率が大きい. 図 2-48 は満載等分布荷重を受ける場合の補剛桁の曲げモーメント  $M_y$  の分布を示しているが, パラメータ  $P_4$  の増大により中央部の曲げモーメントが減少する特徴が現れている.

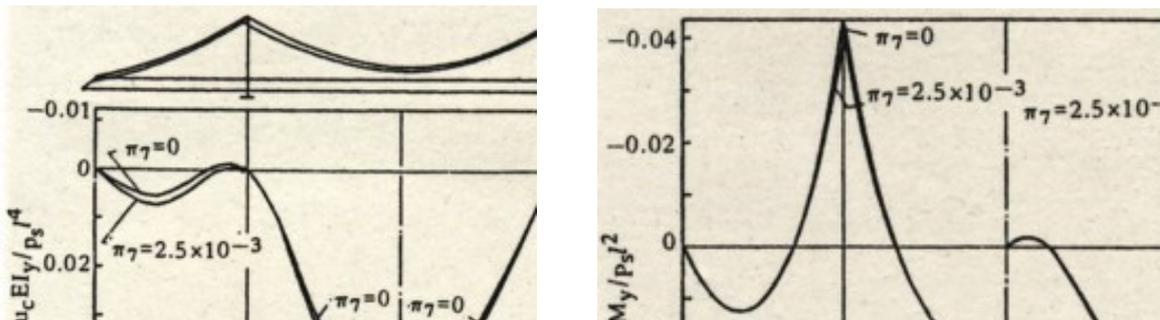


図 2-48 水平横荷重による補剛桁の変位と断面力分布

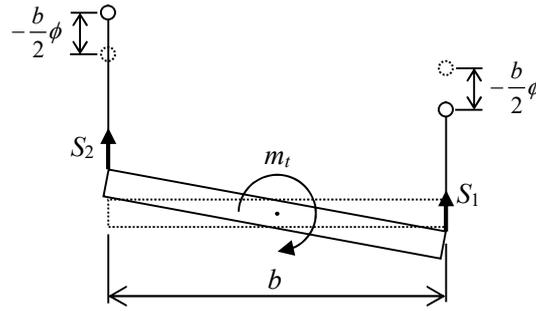


図 2-49 ねじりに関する荷重と抵抗

(4) ねじり理論

1) 基礎微分方程式

吊橋を対象としたねじり理論も鉛直撓みと同様にケーブルと吊構造における釣り合い条件より導くことができる。図 2-49 に示す吊橋断面において左右の吊材力はケーブルの鉛直変位によって

$$S_1 = -(H_d + H_{p1}) \left( \frac{d^2 v_1}{dx^2} + \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - m_c \quad (15)$$

$$S_2 = -(H_d + H_{p2}) \left( \frac{d^2 v_2}{dx^2} + \frac{d^2 y}{dx^2} \right) - m_c \quad (16)$$

と表される。鉛直変位と吊構造のねじれ角  $\phi$  の関係を次のように表す。

$$v_1 = \frac{b\phi}{2}, \quad v_2 = -\frac{b\phi}{2}$$

変位が微小であれば左右のケーブル張力の変動量は

$$H_{p1} = -H_{p2} = H_p$$

と置くことができる。

吊構造におけるねじりに関する釣り合いより

$$\frac{dT}{dx} = -(S_1 - S_2) \frac{b}{2}$$

ここで、吊構造のねじり剛性を  $GJ$ 、そり剛性を  $EC_w$  と表すと

$$T = GJ \frac{d\phi}{dx} - EC_w \frac{d^3 \phi}{dx^3}$$

吊構造が来島大橋のような箱桁や十分な剛性を有する対傾構を持つ箱形トラスであればそり剛性の効果は無視できて、ねじりに関する基礎方程式は 2 階の微分方程式となる。

$$-\left( GJ + \frac{H_d b^2}{2} \right) \frac{d^2 \phi}{dx^2} = m_t + H_p b \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (17)$$

吊構造のそり拘束ねじりを考慮する場合は、ねじりに関する基礎方程式は 4 階の微分方程式となる。

$$EC_w \frac{d^4 \phi}{dx^4} - \left( GJ + \frac{H_d b^2}{2} \right) \frac{d^2 \phi}{dx^2} = m_t + H_p b \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (18)$$

ケーブルの付加水平張力は鉛直たわみと同様にケーブル方程式を用いて

$$H_p = -\frac{E_c F_c}{L_c} \frac{d^2 y}{dx^2} \int \frac{b}{2} \phi dx \quad (19)$$

2) 基礎方程式の解

式(18)の両辺を  $EC_w$  で除して

$$\frac{d^4\phi}{dx^4} - \alpha^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{m_t}{EC_w} + \frac{H_p b}{EC_w} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (20)$$

ここに,  $\alpha^2 = \frac{1}{EC_w} \left( GJ + \frac{H_d b^2}{2} \right)$

式(20)の一般解は

$$\phi = C_1 \cosh x + C_2 \sinh x + C_3 x + C_4 \quad (21)$$

上式に荷重項に関する特解を加えて, 境界条件より積分定数を決定する. 図 2-50 に示す代表的荷重状態に対するねじり角, そりねじりモーメント, ねじりモーメントの解は以下の通りである.

Case-A

$$\phi = \left( m_t + H_p b \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \frac{L^2}{GJ + H_d b^2 / 2} \left[ \frac{x}{2L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) - \frac{1}{(\alpha L)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh \alpha(L/2 - x)}{\cosh \alpha L / 2} \right\} \right]$$

$$H_p = - \frac{E_c F_c}{L_c} \frac{d^2 y}{dx^2} \left( m_t + H_p b \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \frac{L^2}{GJ + H_d b^2 / 2} \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{(\alpha L)^2} \left( 1 - \frac{\tanh \alpha L / 2}{\alpha L / 2} \right) \right\}$$

Case-B

$0 \leq x < a$

$$\phi = \frac{m_t L^2}{GJ + H_d b^2 / 2} \left\{ \frac{b-a}{L} \left( 1 - \frac{a+b}{2L} \right) \frac{x}{L} - \frac{\cosh \alpha b - \cosh \alpha a}{(\alpha L)^2 \sinh \alpha L} \sinh \alpha(L-x) \right\}$$

$$M_\omega = \frac{m_t L^2}{(\alpha L)^2} \frac{\cosh \alpha(L-a) - \cosh \alpha(L-b)}{\sinh \alpha L} \sinh \alpha x$$

$a \leq x \leq b$

$$\phi = \frac{m_t L^2}{GJ + H_d b^2 / 2} \left[ \left\{ \frac{b-a}{L} \left( 1 - \frac{a+b}{2L} \right) \frac{x}{L} - \frac{x-a}{2L} \right\} - \frac{1}{(\alpha L)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh \alpha(L-b) \sinh \alpha x - \cosh \alpha a \sinh \alpha(L-x)}{\sinh \alpha L} \right\} \right]$$

$$M_\omega = \frac{m_t L^2}{(\alpha L)^2} \left\{ 1 - \frac{\cosh \alpha(L-b) \sinh \alpha x - \cosh \alpha a \sinh \alpha(L-x)}{\sinh \alpha L} \right\}$$

$b < x \leq L$

$$\phi = \frac{m_t L^2}{GJ + H_d b^2 / 2} \left\{ \frac{b-a}{L} - \frac{a+b}{2L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) - \frac{\cosh \alpha b - \cosh \alpha a}{(\alpha L)^2 \sinh \alpha L} \sinh \alpha(L-x) \right\}$$

$$M_\omega = \frac{m_t L^2}{(\alpha L)^2} \frac{\cosh \alpha b - \cosh \alpha a}{\sinh \alpha L} \sinh \alpha(L-x)$$

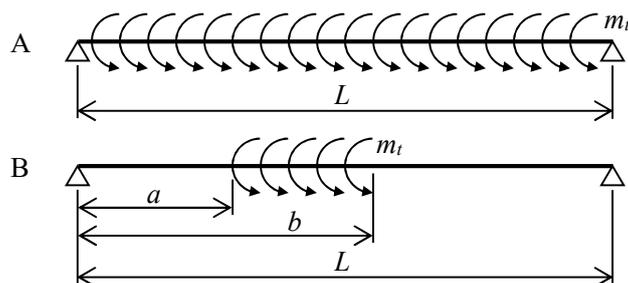


図 2-50 ねじり荷重状態

$$D = \frac{m_i L^3}{GJ + H_d b^2 / 2} \left[ \left\{ \frac{3 - 2b/L}{12} \left( \frac{b}{L} \right)^2 - \frac{3 - 2a/L}{12} \left( \frac{a}{L} \right)^2 \right\} - \frac{1}{(\alpha L)^2} \left\{ \frac{b-a}{L} - \frac{\sinh \alpha(L/2-a) - \sinh \alpha(L/2-b)}{\cosh \alpha L/2} \right\} \right]$$

吊橋のねじりに関する基礎方程式は，鉛直たわみに関する弾性方程式と異なり線形方程式である。しかし，式(18)と式(19)を一挙に計算するより，以下に示すように段階的に計算する方法が効率的である。

最初にケーブル付加張力の仮定値  $H_{p1}$  を与え，外力  $m_i$  と付加張力  $H_{p1}$  による上揚力項によるねじれ角に対してケーブル方程式からケーブル付加張力の計算値  $H_{p2}$  を求める。再び  $H_{p2}$  を仮定値として同様の方法により第2近似の計算値  $H_{p3}$  を求める。ケーブル付加張力の真値  $H_{p0}$  は補間計算により，

$$H_{p0} = \frac{H_{p2}^2 - H_{p1} H_{p3}}{H_{p1} + H_{p3} - 2H_{p2}}$$

と与えられる。ねじれ角や断面力は  $H_p = H_{p0}$  について求めればよい。

### 3) ねじりに関する構造特性

吊橋のねじり荷重による静的応答（変位と部材力）で設計上の問題となるのは，以下の現象である。

- ・道路鉄道併用橋において，ねじり荷重成分が大きい場合，橋面傾斜角（ねじれ角と断面変形角の和）を車両の走行性に関して照査する
- ・補剛トラスの場合，吊構造のねじれによる横構部材力の最大値は支間端部においては，**図 2-50** の Case-A が対象となるが，支間中央部では着目断面で対向したねじり荷重状態が支配的となり，水平横荷重によるせん断力による部材力を上回る可能性がある。
- ・偏心鉛直荷重による補剛トラスの部材力について，1-0 分配法で両側主構面に荷重を分配して，平面解析を行う簡易法と立体解析による計算の最も大きな差は，弦材軸力に現れる。簡易法は過大な軸力を与えることに留意する必要がある。

これらのねじれに関する特性は，南備讃瀬戸大橋を対象とした数値計算<sup>6)</sup>によって詳細に論じられている。

### 4) ねじりに伴う断面変形<sup>6)</sup>

瀬戸大橋のように吊構造内部に複々線の軌道空間を設けた場合，吊構造の断面形状を保持するための横フレームの形式と剛性が問題となる。必要剛性を評価するためにはねじれ角の他に断面のせん断変形（断面変形と称する）を考慮したねじり理論が必要となった。また，ケーブルが釣り合い位置から下方に変位する場合と，逆に上方に持ち上がる場合とではケーブル張力の変化量は厳密には一致しない。このことによって鉛直たわみとの連成が生ずる。外力が鉛直偏心荷重であれば，その鉛直荷重成分によって鉛直たわみが，ねじり荷重成分によってねじりと断面変形が生ずるが，それらを独立に計算すると誤差を生むことに注意する必要がある。

**図 2-51** に示す変位場を考える。両側ケーブルの鉛直変位  $v_1, v_2$  は

$$v_1 = v - \frac{b_c(\phi + \theta)}{2}, \quad v_2 = v + \frac{b_c(\phi + \theta)}{2} \tag{22}$$

と表される。ここに， $v$  は鉛直変位， $\phi$  はねじれ角， $\theta$  は断面変形角である。そのとき左右の吊材力  $S_1, S_2$  は

$$S_i = -(H_d + H_{p1}) \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{b_c}{2} \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) + \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} - m_i \tag{23}$$

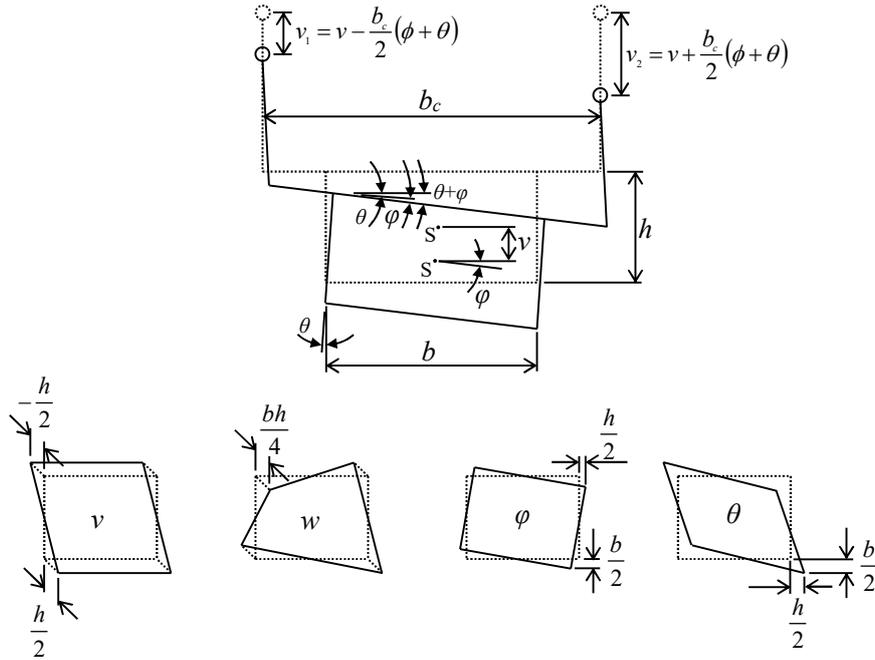


図 2-51 断面変形を含む変位場

$$S_2 = -(H_d + H_{p2}) \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{b_c}{2} \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) + \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} - m_c \quad (24)$$

吊材力が構成する鉛直荷重成分  $p_v$ , ねじり荷重成分  $m_t$  は

$$p_v = -(S_1 + S_2) = (2H_d + H_{p1} + H_{p2}) \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{(H_{p2} - H_{p1}) b_c}{2} \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) + (H_{p2} + H_{p1}) \frac{d^2 y}{dx^2} - m_s \quad (25)$$

$$m_t = -\frac{b_c}{2} (S_2 - S_1) = \left\{ \frac{H_d b_c^2}{2} + (H_{p1} - H_{p2}) \frac{H_d b_c^2}{4} \right\} \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) + \frac{b_c (H_{p2} - H_{p1})}{2} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad (26)$$

また, ねじり荷重成分は断面変形荷重成分としても作用する.

$$m_o = m_t$$

鉛直たわみおよび断面変形を考慮したねじれに関する弾性方程式の荷重項に上式の荷重成分を代入すると,

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} - (2H_d + H_{p1} + H_{p2}) \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{b_c (H_{p2} - H_{p1})}{2} \left( \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) = p_v + (H_{p1} + H_{p2}) \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (27)$$

$$EA_\omega \frac{d^2 \omega}{dx^2} - B_1 \omega - B_2 \frac{d\phi}{dx} - B_1 \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad (28)$$

$$-\left\{ D_1 + \frac{b_c^2 (H_{p1} + H_{p2})}{4} \right\} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - B_2 \frac{d\omega}{dx} - \left\{ D_2 + \frac{b_c^2 (H_{p1} + H_{p2})}{4} \right\} \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \frac{b_c (H_{p2} - H_{p1})}{2} \frac{d^2 v}{dx^2} = m_t + \frac{b_c (H_{p2} - H_{p1})}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (29)$$

$$-\left\{ D_2 + \frac{b_c^2 (H_{p1} + H_{p2})}{4} \right\} \frac{d^2 \phi}{dx^2} - B_1 \frac{d\omega}{dx} - \left\{ D_1 + \frac{b_c^2 (H_{p1} + H_{p2})}{4} \right\} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + c\theta - \frac{b_c (H_{p2} - H_{p1})}{2} \frac{d^2 v}{dx^2} = m_o + \frac{b_c (H_{p2} - H_{p1})}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (30)$$

ここに,  $D_1 = B_1 + \frac{H_d b_c^2}{2}$ ,  $D_2 = B_2 + \frac{H_d b_c^2}{2}$

ケーブル方程式は

$$H_{p1} = -\frac{E_c F_c}{L_c} \frac{d^2 y}{dx^2} \int \left\{ v - \frac{b_c}{2} (\phi + \theta) \right\} dx \quad (31)$$

$$H_{p2} = -\frac{E_c F_c}{L_c} \frac{d^2 y}{dx^2} \int \left\{ v + \frac{b_c}{2} (\phi + \theta) \right\} dx \quad (32)$$

と与えられる。

基礎方程式(27)~(30)の解法, 鉛直たわみとねじれ角, 断面変形角の連成関係あるいは断面変形の影響については文献 6)を参照されたい。

## 2. 9の参考文献

- 1) Melan, J. : Theorie der eisernen Bogenbrücken und der Hängebrücken, Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 1888.
- 2) Moisseiff, L. S., Lienhard, F. : Suspension bridges under the action of lateral forces, Proc. of ASCE, Vol.58, 1937.
- 3) Komatsu, S., Nishimura, N. : Effects of shear deformation on vertical and horizontal bending in suspension bridges, Technology Reports of Osaka University, Vol.26, No.1304, 1976.
- 4) 小松定夫・西村宣男 : 横荷重を受ける吊橋の変形と応力について, 土木学会論文報告集, No.248, 1976.
- 5) Selberg, A. : Berechnung des Verhalten von Hängebrücken, Stahlbau, 14, H.21/22, 1941.
- 6) 小松定夫・西村宣男 : 吊構造の横断面変形を考慮した吊橋の立体解析, 土木学会論文報告集, No.236, 1975.

### 第 3 章 離散的構造解析法と古典力学のコラボレーション (拡張骨組力学応用編)

#### 3. 1 概説

読者は，第 2 章において，初等構造力学から拡張骨組構造力学へ拡張するための理論的展開と拡張骨組構造力学の特徴を理解できたと思う。拡張骨組構造力学の醍醐味はその実務設計への活用にある。第 1 章で述べたように，拡張骨組構造力学の意義は，コンピュータを利用した離散的手法による構造解析結果の力学的解釈のための手段として活用できるところにある。本章では，実構造物を対象とした骨組構造物のマトリクス変位法や薄肉構造物の有限要素法による構造解析問題に対して，拡張骨組構造力学を補助的手段として上手く活用することによって，力学現象のより深い理解に成功した例を解説することにする。

この章で解説する 6 つの事例について，第 2 章で述べた基礎理論および離散的解析法を整理して表 3-1 に掲げておくので，予め関連する拡張骨組理論を復習しておかれない。

#### 3. 2 トラス桁の立体挙動と固有振動

(1) はじめに

2 主構と上下横構とにより長方形の準閉断面を構成されたトラス桁の偏載荷重や水平横荷重による立体的変形および部材力の計算は 3 次元のマトリクス変位法で計算される。これに対応する拡張骨組力学は 2. 3 **せん断変形を考慮したはりの曲げ**，2. 4 **組み立て断面部材の換算剛性**および 2. 7 **閉断面はりの断面のせん断変形**である。偏載荷重の鉛直荷重成分による鉛直たわみあるいは水平横荷重による水平横たわみについては 2. 3，2. 4 を，偏載荷重や水平横荷重のねじり荷重成分に対しては 2. 7 を適用する。なお，トラス桁については支点上の横トラスないしは横フレームの弾性変形によって横たわみ変形と断面のせん断変形を含むねじり変形が連成することに注意する必要がある。

同様のトラス桁の固有振動問題も，鉛直たわみ振動と横たわみおよび断面のせん断変形とが連成した面外振動とに分けて論ずることになる。鉛直たわみ振動については，既に 2. 3 (5)および(6)で説明した。ここでは面外振動に関する固有振動特性を説明する。

表 3-1 第 3 章の事例の関連基礎理論と離散的解析法

第 3 章 (応用編)	第 2 章 (基礎編)	離散的解析法
3. 2 トラスの立体挙動と固有振動	2. 3, 2. 6	マトリクス変位法
3. 3 吊橋の固有振動	2. 7, 2. 9	マトリクス変位法
3. 4 2 主桁橋架設系の安定性	2. 4, 2. 5, 2. 7	マトリクス変位法
3. 5 鋼逆 $\pi$ 形断面合成桁	2. 6	有限要素法
3. 6 波形鋼板ウェブ PC 桁橋梁	2. 3, 2. 5	有限要素法
3. 7 高力ボルト摩擦接合継手における板厚差の影響	2. 2	有限要素法

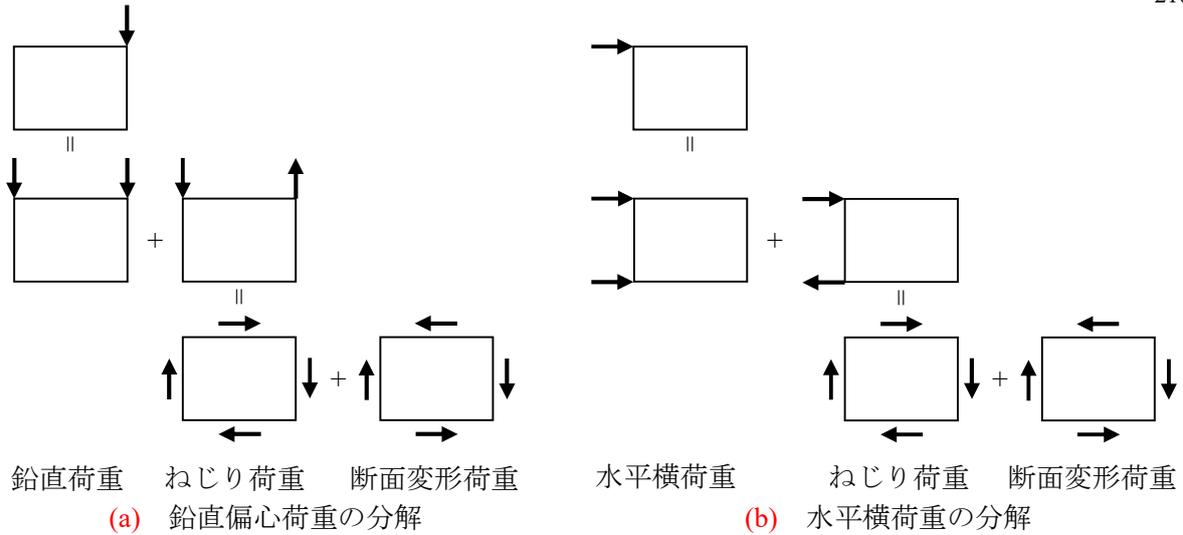


図 3-1 トラス桁に作用する分布荷重の分解

(2) トラス桁の立体挙動に対する拡張骨組理論

1) 荷重の分離

拡張骨組理論では，トラス桁に水平横変位，ねじれおよび断面変形を含む面外変位を生じさせる荷重が作用する場合，先ず外力を鉛直面内変位に関する鉛直荷重と面外変位に関する面外荷重とに分離して，それぞれに対応する理論を当てはめる．図 3-1 に示すように鉛直偏載荷重および水平荷重は，鉛直荷重，ねじれ荷重，断面変形荷重および水平横荷重に分離される．水平横変位とねじれや断面変形の連成はトラス桁の構造的特徴である．上横構の斜材力が支点上対傾構を通じて支点到に流れる際に生ずる支点上対傾構のせん断変形（断面変形）が変位の連成の原因となる．

類似の箱桁でも同様の連成関係が存在するが，支点上ダイアフラムの剛性が大きいために，実務上は支点上ダイアフラムのせん断変形に起因する変位の連成関係を箱桁では無視することができる．

これに対して，マトリックス変位法によりトラス構造の立体解析を行う場合は，特に外力の分離を行う必要はなく，包括的に解を求めることができる長所がある反面，解として得られた変位や部材力の特徴を適確に整理する際に困難さを伴う．

2) 拡張骨組理論の適用

上述のように鉛直偏載荷重は鉛直荷重と面外荷重に分離される．鉛直荷重についてはせん断変形を考慮したはりの曲げ理論（2.3）が適用できる．その際，置換ばりのせん断剛性に関わる形状係数は  $\kappa=1$  としてよい．構造特性を支配する力学パラメータは  $\lambda_s$ （せん断パラメータ）で，連続構造の場合，せん断変形の影響は変位のみならず部材力にも現れることを述べた．

面外荷重については，2.7 の断面のせん断変形理論が適用できる．ただし，上述の理由により水平横たわみ変形と境界条件によって連成することに注意を要する．

(3) 鉛直偏載荷重を受けるトラス桁の変位と部材力特性

1) 実務設計における解析法

一般に鉛直偏載荷重を受けるトラス桁の鉛直変位や主構部材力の計算には，1-0 分配法と称する簡易算定法が用いられてきた．図 3-2 に示すように，鉛直偏載荷重を両側主構に 1-0 の影響線を用いて，両側の主構面内に作用する荷重とし，平面トラスの構造解析法を適用する簡便な方法である．主構の鉛直変位や部材力は安全側に評価できるが，ねじり荷重成分による横構部材力を評価できない．また支間

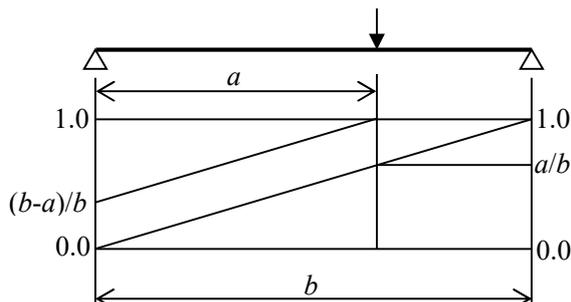


図 3-2 慣用計算法における鉛直偏心荷重の分配

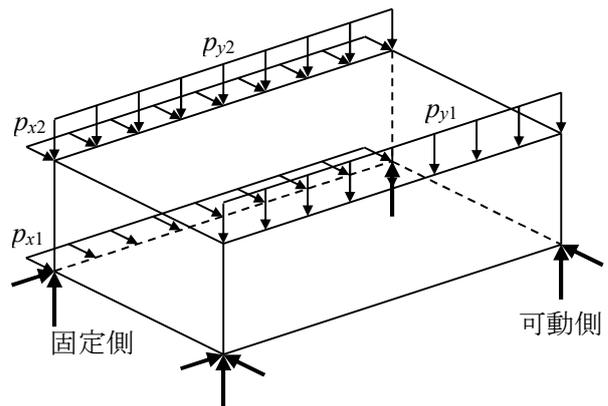


図 3-3 トラス桁の支点における拘束変位

長が大きくなると 1-0 分配法による鉛直変位や主構部材力は安全側に過ぎることが指摘されている。一時は 1-0 分配法と立体解析による部材力の大きい方の値を用いて設計する不合理な設計が行われていたが、最近ではマトリクス変位法による立体解析が設計に取り入れられており、構造モデルの観点での不合理性は解消されてきている。

2) 拡張骨組理論と境界条件

単純トラスの固定側支点および可動側支点における立体解析のための境界条件について考えてみよう。図 3-3 の両側支点の矢印は支点で拘束される変位ベクトルを表している。2 つの固定側支点では鉛直変位、水平横変位の他に橋軸方向変位が拘束される。一般化変位で表現すると、

$$\begin{cases} \varphi(0) + \theta(0) = 0 \\ w(0) + \theta(0)h = 0 \\ \Gamma_0 \theta(0) = -T(0) + T_0(0) - Q_z(0)h \\ \omega(0) \frac{h}{L} = \frac{dw(0)}{dx} - \frac{EI_y}{2Gbt_z L} \frac{d^2w(0)}{dx^2} \\ \frac{d\omega(0)}{dx} = \frac{EI_y h}{2EA_w} \frac{d^2w(0)}{dx^2} \end{cases} \quad (1)$$

同様に可動側支点においては

$$\begin{cases} \varphi(L) + \theta(L) = 0 \\ w(L) + \theta(L)h = 0 \\ \frac{d^2w(L)}{dx^2} = \\ \frac{d^2w(L)}{dx^2} = 0 \\ \frac{d\omega(L)}{dx} = 0 \\ \Gamma_0 \theta(L) = T(L) - T_0(L) + Q_z(L)h \end{cases} \quad (2)$$

拡張骨組理論において、このような境界条件を忠実に考慮して、閉じた解を求めることができる。その計算式は参考文献 1) に譲り、ここでは拡張骨組理論で得られた部材力と力学パラメータの関係を記述することにする。

図 3-3 に示す単径間トラス桁に作用する各構面の分布荷重は 1 次元化理論において、以下の分布荷重で評価される。

$$\begin{aligned} \text{分布ねじり荷重} & : m_t = (p_{y1} - p_{y2}) \cdot b/2 + (p_{zu} - p_{z1}) \cdot h/2 \\ \text{分布断面変形荷重} & : m_\theta = (p_{y1} - p_{y2}) \cdot b/2 - (p_{zu} - p_{z1}) \cdot h/2 \\ \text{分布水平横荷重} & : q_z = p_{zu} + p_{z1} \end{aligned} \quad (3)$$

この項では鉛直偏心荷重を対象として，両側主構への荷重分配，横構の部材力特性について述べる。

3) 力学パラメータと構造特性

平行弦トラス桁の立体的力学特性に関する力学パラメータは弾性方程式の閉じた解，あるいは次元解析によって特定することができる。詳細は参考文献 1) に譲り，各力学パラメータとそれぞれの物理的意味を説明する。

- ①  $rL = L\sqrt{c/(2GJ)}$  : 中間対傾構の断面変形に対する剛性とトラス桁のねじり剛性およびスパン長に関するパラメータで弾性方程式の特性値のひとつ。
- ②  $\mu L = L\sqrt{GJ/(EA_0)}$  : トラス桁のねじり剛性とそりねじり剛性およびスパン長に関するパラメータでいわゆるねじり定数比。
- ③  $\rho = 4\varepsilon(1+\varepsilon)^2$  : 主構面横構面の幅厚比関数， $\varepsilon = t_2h/(t_1b)$
- ④  $C = \Gamma_0/(cL)$  : 端対傾構と中間対傾構の断面変形に対する剛性比。

力学パラメータの組み合わせは下路トラス ( $rL=1, C=10$ )，ダブルデッキトラス ( $rL=5, C=0.1$ ) および上路トラス ( $rL=10, C=0.1$ ) を想定している。

鉛直偏心荷重によるトラス桁の変形状態を説明するために，ねじれ角と断面変形角の和である橋面傾斜角  $\varphi + \theta$  とねじれ角の橋軸方向分布を図 3-4 に示す。また，スパン中央の弦材力を慣用法 (1-0 分配法) による部材力で除して無次元表示して図 3-5 に示す。さらに各構面 (主構と横構) のせん断力の橋軸方向分布を慣用法による支点せん断力で除して無次元表示し図 3-6 に示す。これらの変形や部材力と力学パラメータの関係を説明する。

- ・下路トラスではねじれ角よりも断面変形角が卓越しているが，上路トラスでは中間対傾構の断面変形に対する剛性が大きいので，断面変形角は小さくなる。
- ・中間対傾構の剛性が中程度であるダブルデッキトラスでは断面変形の影響を無視できない。また端対傾構のせん断変形が有意な大きさで生じている。
- ・パラメータ  $\mu L$  が大きくなると変位が増大するのはねじれ変形に対する弦材の抵抗が小さくなるため

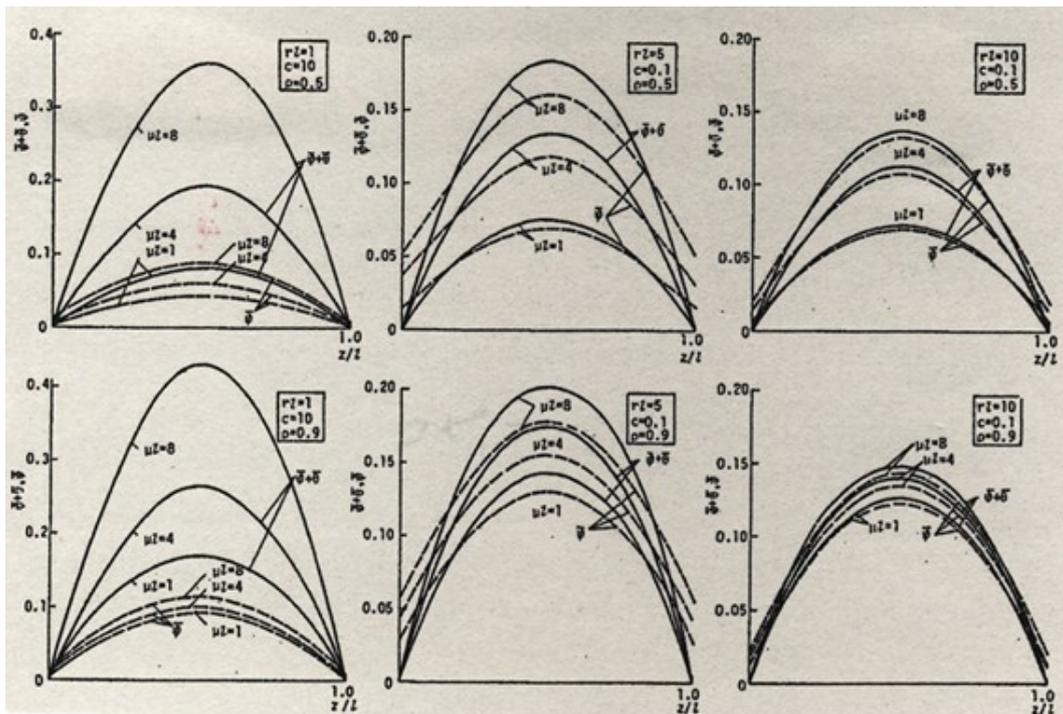
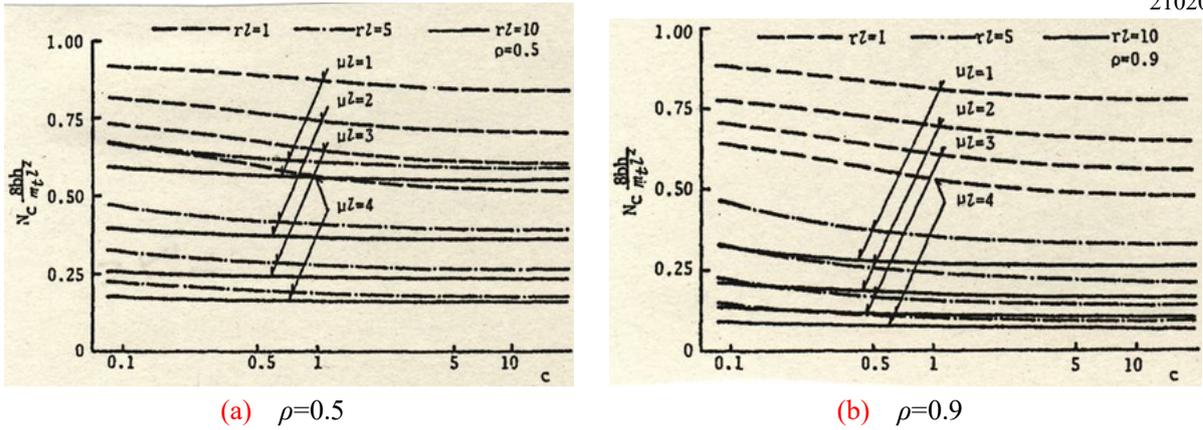


図 3-4 ねじり荷重による橋面傾斜角とねじれ角分布



(a)  $\rho=0.5$

(b)  $\rho=0.9$

図3-5 スパン中央弦材力と力学パラメータの関係

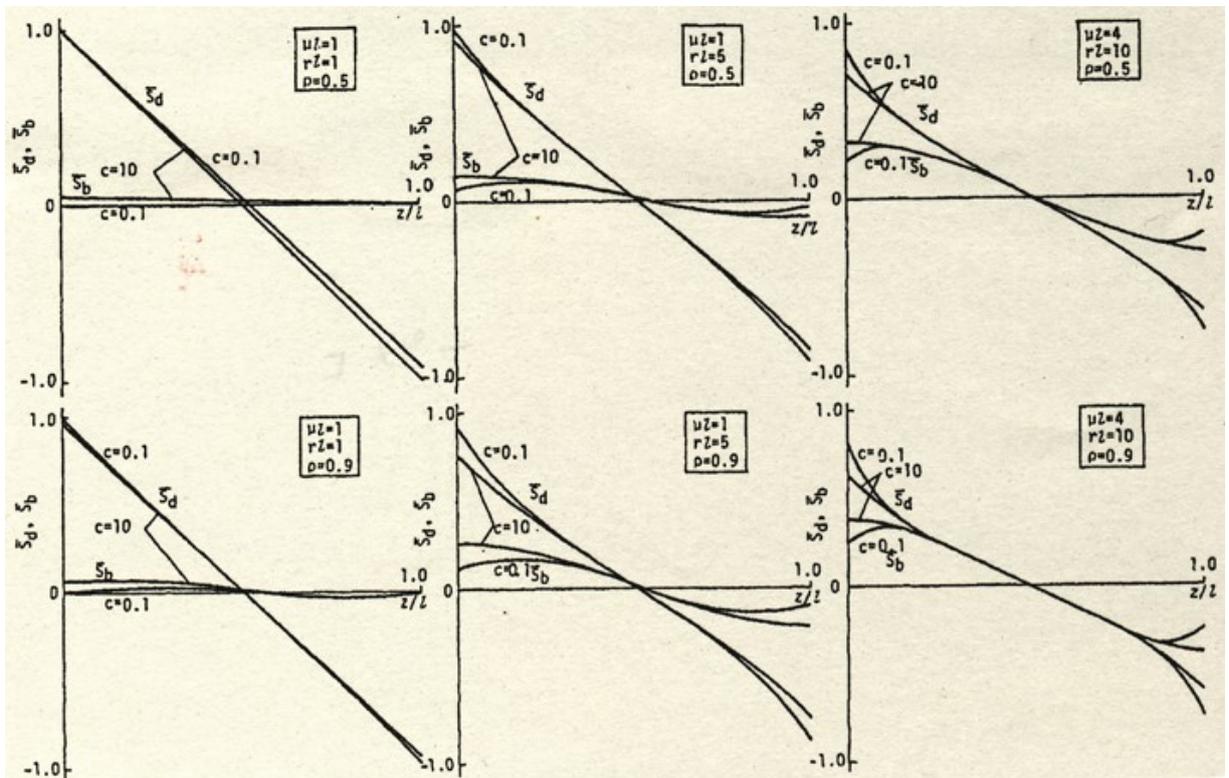


図3-6 ねじり荷重による主構面および横構面の斜材力分布

ある。このことはスパン中央の弦材力とパラメータの関係を表している。

- 図3-5からも、 $\mu L$ の増加につれ弦材力が小さくなることから確認することができる。
- 両側主構のせん断力は  $rL$  が小さい下路トラスでは慣用法 (1-0 分配法) と同様であり立体構造としての両側主構の分配効果は見られない。  $rL$  が大きい上路トラスでは支間の中央部では両側主構の荷重分配効果が発揮されるが支点近傍では端対傾構のせん断変形の影響によって荷重分配効果が減少する。横構面せん断力も支点付近では減少する傾向にある

(4) 横荷重を受けるトラス桁の変位と部材力特性

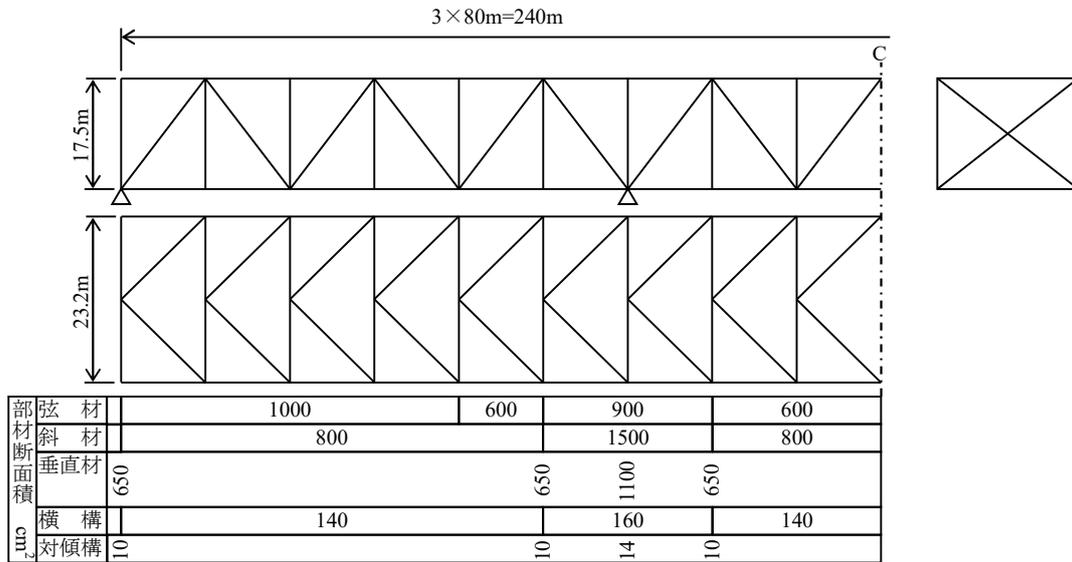
1) 実務設計における設計法

静的荷重として評価された風荷重や地震荷重のような水平横荷重を受ける場合の部材力は、上下横構の構面に作用する荷重成分がそれぞれの構面を通じて支点上対傾構 (ないしは横フレーム) に伝わり、支点上対傾構を通じて支承に伝達されると解釈する設計法が永年用いられてきた。そのような平面解析

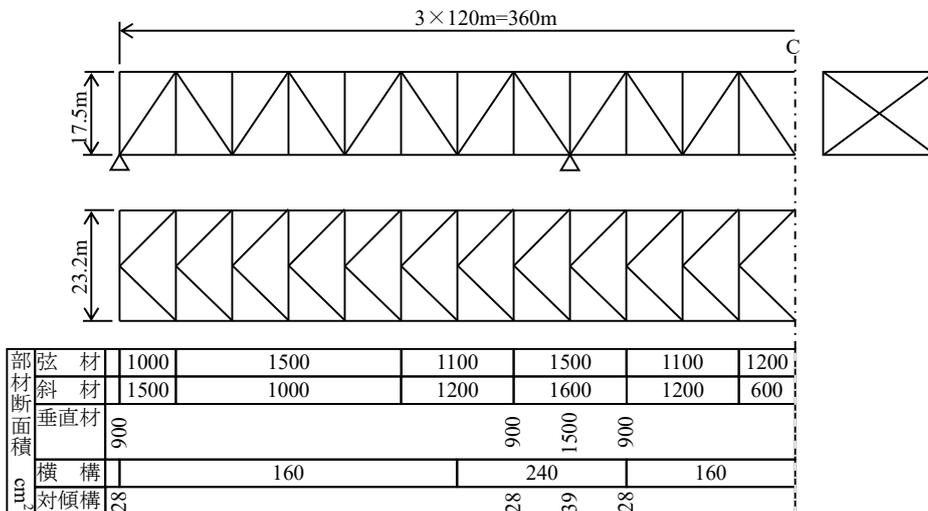
を前提とした部材力算定法では支点上対傾構の部材力を過大に評価すること，なによりも平面解析では支点部に隣接した中間対傾構を通じて上横構から下横構へと伝達されるせん断力を無視することになり，支点に隣接する下横構および中間対傾構の安全設計に問題がある．鉛直偏載荷重と同様に立体的な力の流れを考慮できる構造解析法を設計において使用するべきであるが，どのようなトラス構造の場合に立体的構造特性が設計上重要となるのかは，拡張骨組理論を通じて明らかにしておくことが大切である．

2) マトリックス変位法と拡張骨組理論

本項では，図 3-1 の荷重群の内，水平横荷重  $p_{2u}$ ,  $p_{2l}$  による横構部材力について述べる．先ず，マトリックス変位法と拡張骨組理論による計算結果を比較することにより，拡張骨組理論の有効性を検証する．図 3-7 に示す 3 区間連続平行弦トラスが水平横荷重を上弦材の高さに受ける場合（上弦載荷）と下弦材の高さに受ける場合（下弦載荷）について比較し，表 3-2 および表 3-3 に掲げる．これらの表には前述の慣用計算法による部材力も併せて示している．この比較により，拡張骨組理論とマトリックス変位法による部材力はトラス桁の立体挙動を反映できており大略同じ傾向にあること，また慣用



(a) Type 1



(b) Type 2

図 3-7 解析モデルの骨組構成と部材断面積

表 3-2 マトリックス変位法および慣用法との比較 (横荷重上弦材)

着目部材		Type 1			Type 2		
		本法	変形法	慣用法	本法	変形法	慣用法
上横構	側径間	20.54	17.24	28.86	22.12	23.86	47.58
	中央径間	21.15	17.04	28.18	21.30	21.54	44.60
下横構	側径間	25.57	24.82	0.00	42.58	40.60	0.00
	中央径間	25.47	23.77	0.00	42.10	37.12	0.00
端対傾構		19.64	13.79	50.10	24.36	24.40	25.16
中間対傾構		13.48	6.86*	8.35	15.31	5.35*	9.39

単位 ton

表 3-3 マトリックス変位法および慣用法との比較 (横荷重下弦材)

着目部材		Type 1			Type 2		
		本法	変形法	慣用法	本法	変形法	慣用法
上横構	側径間	3.17	3.70	0.00	8.68	8.60	0.00
	中央径間	2.56	2.87	0.00	7.04	7.34	0.00
下横構	側径間	28.57	25.56	28.86	46.68	42.12	47.58
	中央径間	26.74	23.95	28.18	41.97	37.47	44.60
端対傾構		1.91	2.41	0.00	8.23	8.99	0.00

単位 ton

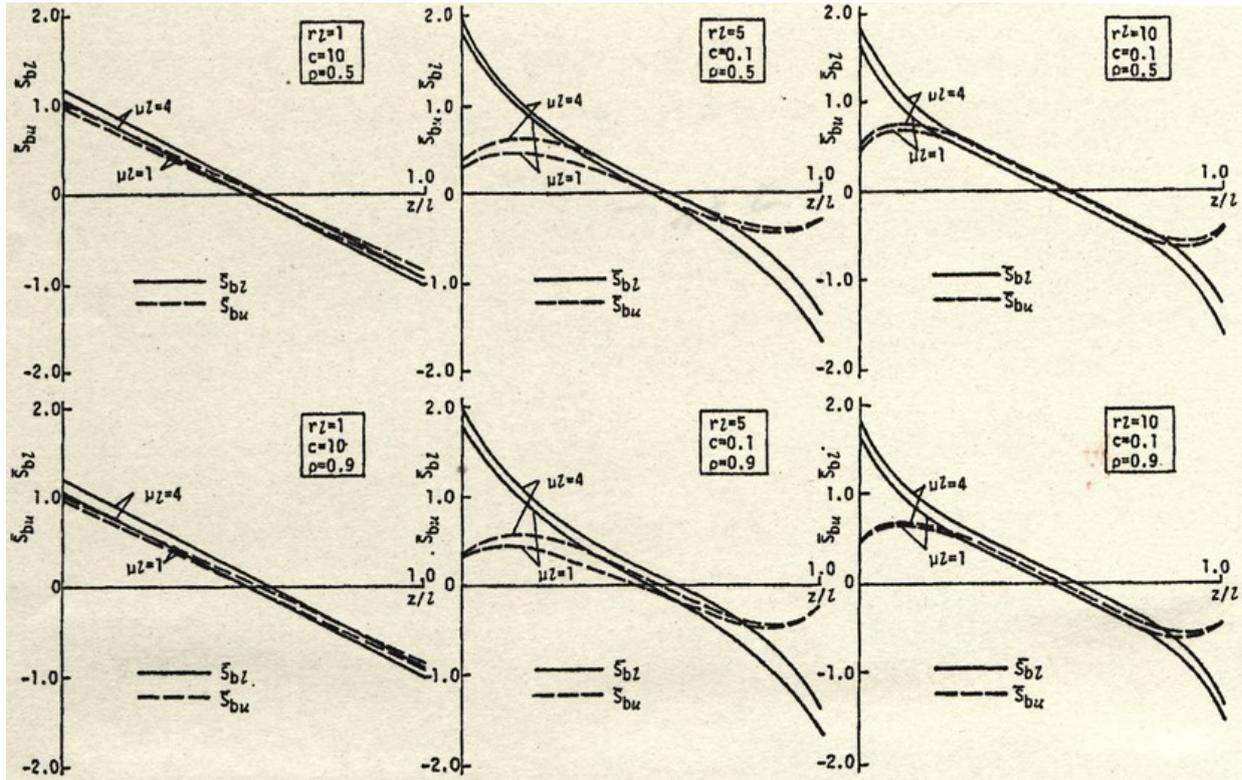


図 3-8 水平横荷重による横構面せん断力分布

計算法による部材力は立体的な力の流れを捉え切れていないことが明白であり、特にこの荷重状態については下横構および中間対傾構の部材力を危険側に評価する可能性が示唆された。

3) 力学パラメータと構造特性

・水平横荷重を受けるトラス桁の応力特性に関係する力学パラメータは、前述の鉛直偏心荷重に対するものと同様である。この中でも支配的なパラメータは、中間対傾構の断面変形に対する剛性に関する力学パラメータ  $rL$  である。図 3-8 は等分布水平横荷重 (上下弦材に同じ大きさの荷重を載荷) による単純トラスの上下横構せん断力の分布を示している。力学パラメータの組み合わせは下路トラス ( $rL=1, C=10$ )、ダブルデッキトラス ( $rL=5, C=0.1$ ) および上路トラス ( $rL=10, C=0.1$ ) を想定している。また、横構せん断力は、次のように慣用計算法による支点上せん断力で除して無次元表示している。

$$\bar{S}_{bu} = \frac{4S_{bu}}{q_z L}, \quad \bar{S}_{bz} = \frac{4S_{bz}}{q_z L}$$

・固定支点と可動支点における鉛直軸回りの回転拘束の差により固定支点側のせん断力が可動支点側のそれより若干大きくなる。中間対傾構を通じてのせん断力の交換がほとんど無い下路トラスの下横構

せん断力に明瞭に現れている。

- ・ダブルデッキトラスおよび上路トラスのように中間対傾構を通じて上横構せん断力が下横構へ流れる形式では支点到近づくと，慣用法に比べて下横構せん断力が大きくなり，その分上横構せん断力が減少する。

(5) トラス桁の固有振動特性

1) トラス桁の面外振動

トラス桁をはり理論で評価する場合，斜材の弾性変形に相当するせん断変形を考慮しなければならない。既に，曲げに伴うせん断変形の影響を評価するための尺度としては，せん断パラメータ  $\lambda = \kappa EI / GAL^2$  が有効であること，曲げ剛性とせん断剛性の比とともに，代表長  $L$  の二乗の逆数に関係することも説明した。鉛直たわみ振動の場合，固有振動数を評価する際の代表長は固有モードの節間距離であり，高次モードになるほど節間距離すなわち代表長が短くなって，せん断変形の影響は飛躍的に顕著になることを説明した。ここでは水平横たわみ，ねじれおよび断面変形が連成するトラス桁の面外振動について説明する。

2) 断面変形を含むねじり振動

簡単のために境界条件に起因する水平横たわみとの連成を省略したトラス桁の断面変形を含むねじり固有振動について述べる。

$$\begin{cases} -A_\omega \frac{d^2\omega}{dx^2} + B_1\omega + B_2 \frac{d\varphi}{dx} + B_1 \frac{d\theta}{dx} = -\frac{W_\omega}{g} \frac{d^2\omega}{dt^2} \\ -B_2 \frac{d\omega}{dx} - B_1 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - B_2 \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{W_\omega}{g} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{W_\theta}{g} \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ -B_1 \frac{d\omega}{dx} - B_2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} - B_1 \frac{d^2\theta}{dx^2} + c\theta = -\frac{W_\theta}{g} \frac{d^2\varphi}{dt^2} - \frac{W_\theta}{g} \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases} \quad (4)$$

ここに， $A_\omega = EA_c b^2 h^2 / 4$ ， $B_1 = Gbh(bt_1 + ht_2) / 2$ ， $B_2 = Gbh(bt_1 - ht_2) / 2$ ， $W_\omega = \int_A y^2 z^2 \rho dA$ ， $W_\varphi = \int_A (y^2 + z^2) \rho dA$ ， $W_\theta = \int_A (y^2 - z^2) \rho dA$

低次の固有振動については  $W_\omega$  の影響は小さいので，これを無視すると固有円振動は以下のように与えられる。

$$\omega \sqrt{\frac{W_\varphi L^2}{gGJ}} = \pi \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}} \quad (5)$$

ここに， $A = \left\{ 1 + \rho \left( \frac{\pi}{\mu L} \right)^2 \right\} (1 - \eta^2)$ ， $B = 2 \left\{ 1 + \rho \left( \frac{\pi}{\mu L} \right)^2 \right\} \left\{ \left( \frac{rL}{\pi} \right)^2 + 2 \left( \frac{\pi}{\mu L} \right)^2 (1 - \eta \sqrt{1 - \rho}) \right\} + 1$ ， $C = \left( \frac{\pi}{\mu L} \right)^2 \left\{ 1 + 2 \left( \frac{rL}{\pi} \right)^2 \right\} + 2 \left( \frac{rL}{\pi} \right)^2$

$$GJ = \frac{B_1 - B_2^2}{B_1}， \rho = \frac{GJ}{B_1}， (\mu L)^2 = \frac{GJL^2}{A_\omega}， (rL)^2 = \frac{cL^2}{2GJ}， \eta = \frac{W_\theta}{W_\varphi}$$

3) 支点上の対傾構の弾性変形を考慮した水平横たわみ振動

トラス橋の水平横たわみ振動では，支点上対傾構のせん断変形に起因して，断面変形とねじれ変形が連成する。ダブルデッキトラスのように比較的中間対傾構剛性が小さい場合を想定し，**図 3-9** に示すように，デッキ面が水平にスウェイするモードを対象とした振動モデルを考える。振動方程式は上下デッキ面の水平変

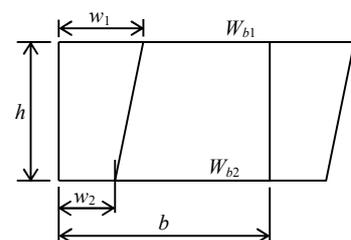


図 3-9 水平横たわみ振動

位に着目して

$$EI_{y1} \frac{d^4 w_1}{dx^4} + k(w_1 - w_2) - \frac{kEI_{y1}}{GA_{z1}} \left( \frac{d^2 w_1}{dx^2} - \frac{d^2 w_2}{dx^2} \right) + \frac{W_{b1}}{g} \frac{d^2 w_1}{dt^2} - \frac{W_{b1}}{g} \frac{EI_{y1}}{GA_{z1}} \frac{d^4 w_1}{dx^2 dt^2} = 0 \quad (6)$$

$$EI_{y2} \frac{d^4 w_2}{dx^4} + k(w_1 - w_2) - \frac{kEI_{y2}}{GA_{z2}} \left( \frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) + \frac{W_{b2}}{g} \frac{d^2 w_2}{dt^2} - \frac{W_{b2}}{g} \frac{EI_{y2}}{GA_{z2}} \frac{d^4 w_2}{dx^2 dt^2} = 0 \quad (7)$$

ここに,  $EI_{yi}$ ,  $GA_{zi}$ ,  $w_i$ ,  $W_{bi}$  はそれぞれ横構の換算曲げ剛性, せん断剛性, 水平変位および分布死荷重を,  $i=1$  は上横構,  $i=2$  は下横構に関する量を表す.  $k$  は中間対傾構のせん断剛性を橋軸方向に分布するバネと見なしたもので, 前出の断面変形に関する剛性  $c$  とは以下の関係にある.

$$k = \frac{ch^4}{4}$$

単径間トラスについて上記の振動方程式の基本固有振動数を求め無次元表示すると

$$\omega^2 \frac{W_{b1} L^2}{gEI_{y1}} = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1 - \sqrt{(A_1 B_2 + A_2 B_1)^2 + 4 B_1 B_2 (C_1 C_2 - A_1 A_2)}}{2 B_1 B_2} \quad (8)$$

ここに,  $A_1 = \varepsilon \pi^4 + UB_1$ ,  $A_2 = \pi^4 + UB_2$ ,  $B_1 = 1 + \varepsilon R + \frac{8\pi^2}{S} + \frac{2\pi^4}{S^2}$ ,  $B_2 = 1 + R$ ,  $C_1 = \varepsilon UB_2$ ,  $C_2 = U(\varepsilon + R)$ ,

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi^2}{S}, \quad U = \frac{(\mu L)^2 (rL)^2}{4}, \quad S = CU, \quad R = \frac{2\pi^2}{(\mu L)^2} (1 \pm \sqrt{1 - \rho})$$

$B_2 \geq 0$  のとき+,  $B_2 < 0$  のとき-

$$C = \frac{K}{kL} = \frac{\Gamma_0}{rL}, \quad K = \frac{\Gamma_0}{4h^2}$$

$\Gamma_0$ : 支点上対傾構の断面変形剛性

#### 4) 力学パラメータと固有振動特性

以上述べた平行弦トラス桁の固有振動数は4つの力学パラメータに関係していることが明らかになった. それらはトラス桁の静的釣り合い問題と共通に  $rL$ ,  $\mu L$ ,  $\rho$  および  $C$  である. 振動問題ではこれらに断面内の質量分布に関するパラメータ  $\eta$  が加わる.

なお, 一般にトラス橋では, せん断パラメータ  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  と  $\mu L$ ,  $\rho$  の間には

$$\xi_1 = \frac{EI_z}{GA_y L^2} = \frac{2(1 \mp \sqrt{1 - \rho})}{(\mu L)^2}$$

$$\xi_2 = \frac{EI_y}{GA_z L^2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{1 - \rho})}{(\mu L)^2}$$

(復号の上段は  $B_2 > 0$ , 下段は  $B_2 < 0$  の場合)

なる関係が成立している.

**図3-10** は断面変形を考慮した固有ねじり振動数と力学パラメータ  $rL$  の関係を示している. ねじり振動には, ねじり角と断面変形角が同位相 (ねじり振動第1種) と逆位相 (ねじり振動第2種) の2種類が存在している. **図3-10** の3本の実線の中で最も振動数が低いのはねじり振動第1種1次モード, その次にねじり振動第1種2次モード, 最も高いのはねじり振動第2種1次モードに対応している. ねじり振動第2種は断面変形角が卓越する振動モードでパラメータ  $rL$  の増加につれ振動数が急増する.

**図3-11** は, 基本水平たわみ振動数と力学パラメータ  $\mu L$  および  $C$  の関係を表している. パラメータ  $C$  が大きくなると水平横たわみが卓越した振動となり, 図中に記入したせん断変形を考慮した水平横

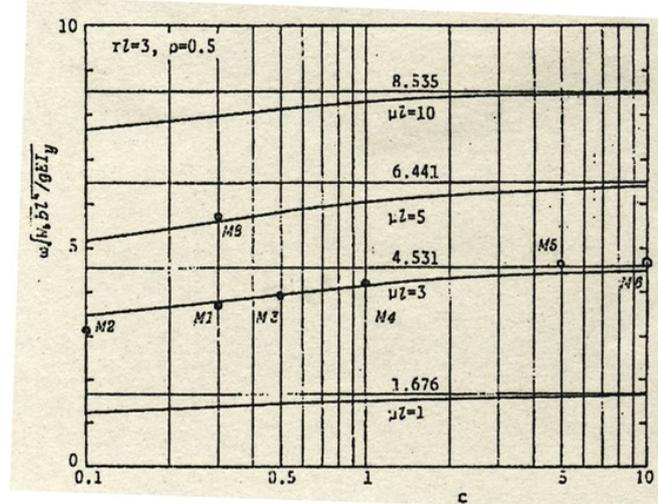
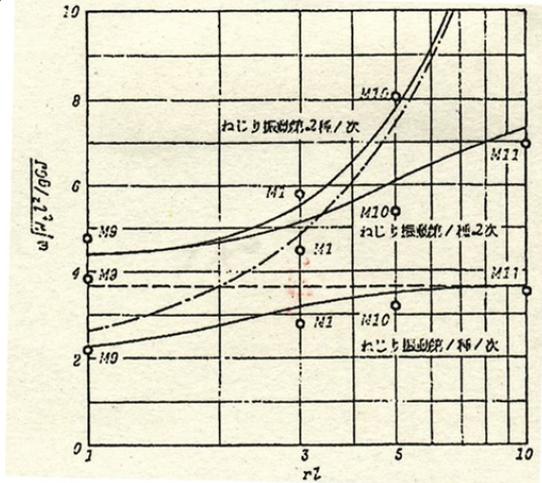


図3-10 固有ねじり振動数と  $rL$  の関係

図3-11 水平横たわみ基本固有振動数と  $c$  の関係

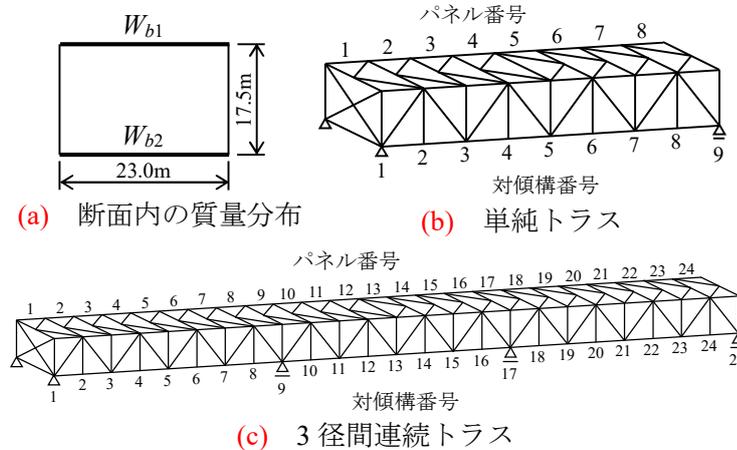


図3-12 比較計算モデル

表3-4 モデルの力学パラメータ

モデル番号	$rl$	$\mu l$	$c$	共通パラメータ
M1	3	3	0.3	$\rho=0.5$ $\eta=0.156$ $\zeta_1=0.100$ $\zeta_2=0.003$
M2	3	3	0.1	
M3	3	3	0.5	
M4	3	3	1.0	
M5	3	3	5.0	
M6	3	3	10.0	
M7	3	4	0.3	
M8	3	5	0.3	
M9	1	3	0.3	
M10	5	3	0.3	
M11	10	3	0.3	

たわみ振動数に漸近する。

5) 動的マトリックス変位法との比較

上記の拡張骨組理論によるトラス桁の固有振動解析の精度を確認するために、図3-12に示す単径間および3径間連続トラスのモデルをマトリックス変位法（ランプトマス）を適用して固有振動解析を行い、式(5)や式(8)と同様の無次元表示を行って、拡張骨組理論との比較を行った。また表3-4は各モデルの力学パラメータを表している。マトリックス変位法による結果は図3-10および図3-11中の丸印とモデル番号で識別できるようにした。

3. 2の参考文献

1) 小松定夫・西村宣男：薄肉弾性ばり理論によるトラス橋の立体解析，土木学会論文報告集，No.238，1975.

### 3. 3 吊橋の固有振動

(1) はじめに

前節で述べたトラス桁の固有振動と同様に，補剛トラス吊橋の固有振動数と力学パラメータの関係を拡張骨組理論による簡易計算法を適用して説明する．吊橋の固有振動数を計算するための拡張理論は，2. 9 で取り上げた 3 種類の静的釣り合い問題に関する弾性方程式の荷重項を慣性項に置き換え，固有値問題として表現することから始まる．従って，振動タイプとして，鉛直たわみ振動，水平たわみ振動およびねじり振動に分類される．

トラス桁に見られた水平横たわみとねじれや断面変形との連成関係は，補剛トラス吊橋の場合，あまり重要ではない．主塔基部の支点において主構面はタワーリンクによって吊られ，横構面はウインド杓によって水平変位が拘束されるので，境界条件によってこれらの変位間の連成が生ずることはないからである．但し，側径間のアンカレッジ側の支持条件は通常のトラス桁と大きく変わることはないので，水平変位とねじれや断面変形の連成が生ずるが，吊橋構造全体への影響は僅少である．

吊橋の設計において問題となる振動現象としては，地震応答，耐風安定，走行車両による振動などがある．これらの振動現象は低次の基本固有振動だけではなく，相当高次の固有振動までが影響を与える可能性がある．低次振動では無視できせん断変形の影響が高次振動では重大な影響を与えることを示そう．

(2) 鉛直たわみ振動

1) 振動方程式

ダランベールの定理によって，補剛トラスのせん断変形を考慮した吊橋の鉛直たわみに関する弾性方程式の荷重項を慣性力に置き換えると，鉛直たわみに関する自由振動方程式が与えられる．

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - H \frac{d^2 v}{dx^2} - H_p \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{m_d}{g} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{EI_z}{GA_y} \frac{m_d}{g} \frac{d^4 v}{dx^2 dt^2} \quad (1)$$

ここに， $EJ=EI_z(1-H_d/GA_y)$ ， $EI_z$ ：水平軸回りの吊橋構造曲げ剛性， $H_d$ ：ケーブルの死荷重張力， $GA_y$ ：吊構造のせん断剛性， $m_d$ ：単位長さ当たりの死荷重量， $g$ ：重力加速度

ケーブルの付加  $H_p$  に関してケーブル方程式を適用する．

$$H_p = \frac{E_c F_c}{L_c} \int_L \frac{d^2 y}{dx^2} v dx \quad (2)$$

ここに， $E_c F_c$ ：主ケーブルの伸び剛性， $L_c$ ：ケーブルの等価長， $\int_L$ ：アンカレッジ間の積分．

2) 固有振動数

変位  $v$  は微小として，ケーブルの死荷重による水平張力  $H_d$  と振動時に付加される水平張力  $H_p$  の間に

$$H_d \gg H_p$$

が成立しているとする． $v$  と  $H_p$  を座標  $x$  と時間  $t$  に関して変数分離して

$$v = ve^{-\omega t}, \quad H_p = H_p e^{-\omega t} \quad (3)$$

と表す．基礎式 (1)，(2) に代入し，さらに  $H_p$  を消去すると

$$EJ \frac{d^4 v}{dx^4} - H \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{E_c F_c}{L_c} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \int_L v dx = \frac{m_d}{g} \omega^2 v - \frac{EI_z}{GA_y} \frac{m_d}{g} \omega^2 \frac{d^2 v}{dx^2} \quad (4)$$

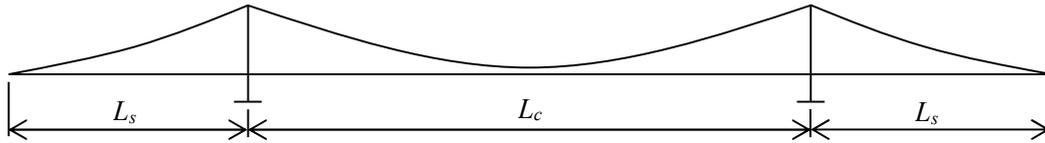


図 3-1-3 3 径間 2 ヒンジ吊橋

を得る．ここで図 3-1-3 に示す 3 径間 2 ヒンジ吊橋を考える．

逆対称振動については式(4)左辺第 3 項の積分値が 0 となり，振動モードを

$$v = \sum C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{5}$$

(中央径間について  $n=2, 4, 6, \dots$ ，側径間について  $n=1, 2, 3, \dots$ )

とすると固有円振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{1 + P_1^2 / (n\pi)^2}{1 + P_3(n\pi)^2}} \tag{6}$$

ここに，  $P_1 = L \sqrt{\frac{H_d}{EI}}$ ，  $P_3 = \frac{EI}{GAL^2}$

対称振動については  $H_p \neq 0$  であるから式(4)にガラーキンを適用して

$$EJ \int \frac{d^4 v}{dx^4} v_m dx \text{ ①} - H_d \int \frac{d^2 v}{dx^2} v_m dx \text{ ②} - \frac{E_c F_c}{L_c} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \iint v dx v_m dx \text{ ③} = \frac{m_d}{g} \omega^2 \int v v_m dx \text{ ④} - \frac{EI}{GA} \frac{m_d}{g} \omega^2 \int \frac{d^2 v}{dx^2} v_m dx \text{ ⑤} \tag{7}$$

変位  $v$  および座標関数  $v_m$  は単純支持された補剛トラスに対して

中央径間：  $v = a_m \sum \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right)$ ，  $v_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right)$  (8)<sub>1</sub>

側径間：  $v = b_m \sum \sin\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right)$ ，  $v_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right)$  (8)<sub>2</sub>

ガラーキンの式(7)に式(8)の級数と座標関数を代入し，直交性を考えると式(7)の下線部①，②，④および⑤項は

項番号	中央径間	側径間
①	$EJ_c \left(\frac{m\pi}{L_c}\right)^4 \frac{L_c}{2} a_m$	$EJ_s \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^4 \frac{L_s}{2} b_m$
②	$H_d \left(\frac{m\pi}{L_c}\right)^4 \frac{L_c}{2} a_m$	$H_d \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^4 \frac{L_s}{2} b_m$
④	$\frac{m_{dc}}{g} \frac{\omega^2 L_c}{2} a_m$	$\frac{m_{ds}}{g} \frac{\omega^2 L_s}{2} b_m$
⑤	$\frac{m_{dc}}{g} \frac{EI_{xc}}{GA_{yc}} \left(\frac{m\pi}{L_c}\right)^2 \frac{\omega^2 L_c}{2} a_m$	$\frac{m_{ds}}{g} \frac{EI_{xs}}{GA_{ys}} \left(\frac{m\pi}{L_s}\right)^2 \frac{\omega^2 L_s}{2} b_m$

連成項③は

中央径間：  $\frac{E_c F_c}{L_c} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \sum \left\{ \left( \frac{2L_c}{m\pi} \right) \left( \frac{2L_c}{n\pi} a_n + \frac{4L_s}{n\pi} b_n \right) \right\}$

側径間：  $\frac{E_c F_c}{L_c} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \sum \left\{ \left( \frac{4L_s}{m\pi} \right) \left( \frac{2L_c}{n\pi} a_n + \frac{4L_s}{n\pi} b_n \right) \right\}$

以上を考慮すると式(7)は未定係数  $a_m$  と  $b_m$  に関する連立 1 次方程式となり，その係数行列式（振動数

方程式) は

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} - \omega^2 P_5^2 \begin{vmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

となる．部分行列  $\mathbf{A}_{11}$  の対角要素  $a_{mm}^{11}$  は

$$a_{mm}^{11} = (1 + P_1^2 P_3) \pi^4 m^4 + P_1 \pi^2 m^2 + \frac{512 P_2 P_1^2}{\pi^2 m^2}$$

非対角要素  $a_{mn}^{11}$  は

$$a_{mn}^{11} = \frac{512 P_2 P_1^2}{\pi^2 mn}$$

部分行列  $\mathbf{A}_{12}$  の一般要素  $a_{mn}^{12}$  は

$$a_{mn}^{12} = \frac{1024 P_2 P_1^2 P_4}{\pi^2 mn}$$

部分行列  $\mathbf{A}_{22}$  の対角要素  $a_{mm}^{22}$  は

$$a_{mm}^{22} = 2(1 + P_1^2 P_3) \frac{\pi^4 m^4}{P_4^3} + \frac{P_1 \pi^2 m^2}{P_4} + \frac{2048 P_2 P_1^2 P_4^2}{\pi^2 m^2}$$

非対角要素  $a_{mn}^{22}$  は

$$a_{mn}^{22} = \frac{2048 P_2 P_1^2 P_4^2}{\pi^2 mn}$$

部分行列  $\mathbf{B}_{11}$  の対角要素  $b_{mm}^{11}$  は

$$b_{mm}^{11} = 1 + P_3 \pi^2 m^2$$

部分行列  $\mathbf{B}_{22}$  の対角要素  $b_{mm}^{22}$  は

$$b_{mm}^{22} = 2P_4 \left( 1 + P_3 \frac{\pi^2 m^2}{P_4^2} \right)$$

と全て力学パラメータの組み合わせによって表現された．

$$P_2 = \frac{E_c F_c f^2}{L_c' H_d L_c}, \quad P_4 = \frac{L_s}{L_c}$$

さらに，円振動数は以下のように無次元表示される．

$$\omega \sqrt{\frac{m_d L_c^4}{gEI}} = \omega P_5 \quad (10)$$

### 3) 力学パラメータと固有振動特性

吊橋の鉛直たわみの固有振動数は上記の4つの力学および構造パラメータが関与している．

$P_1$  : Steinman 定数と称されているケーブルの死荷重張力による復元力と吊構造の曲げ剛性の比に関係した力学パラメータ

$P_2$  : ケーブルの伸び剛性と死荷重による復元力の比に関する力学パラメータ

$P_3$  : 吊構造のせん断パラメータ (2. 3 の  $\lambda_s$  と同義)

$P_4$  : 径間長の比

これらの力学パラメータの実橋 (中央径間長 500m 以上) について調査したところ，以下の範囲に分布していた．

$P_1$  : 8~50, 中央径間長に比例する傾向にある.

$P_2$  : 1.5~2.5, 平均 2.1 程度であり変動しない.

$P_3$  : 10<sup>-4</sup>~5×10<sup>-4</sup>

$P_4$  : 0.18~0.5

補剛トラス吊橋の鉛直たわみ固有振動特性を 2 つの実橋の観測データと比較することによって説明する.

最初の吊橋は Vincent Thomas 橋 (USA) で, 耐震補強の必要性が指摘され, その対策のために固有振動特性が詳細に観測された. その研究チームの一員であった Abdel-Ghaffar<sup>2)</sup>は吊橋専用のマトリクス変位法を開発して観測データとの比較を行っている. ただし, 剛性マトリクスは補剛トラスのせん断変形を考慮しない理論に基づいて誘導された.

Vincent Thomas 橋の主要諸元は以下の通りである.

中央径間長  $L_c=460\text{m}$ , 側径間長  $L_s=155\text{m}$ , バックステイ径間長  $L_b=53.8\text{m}$ , 同角度  $\theta_b=40$  度,

ケーブルサグ  $f=46.1\text{m}$ , タワー高  $h_T=48.0\text{m}$ , 補剛トラス高さ  $h=4.575\text{m}$ ,

補剛トラス間隔  $b=18.034\text{m}$ , パネル間隔  $\lambda=4.74\text{m}$ , ケーブル断面積  $F_c=0.078\text{m}^2$ ,

弦材断面積  $A_c=0.0347\text{m}^2$ , 斜材断面積  $A_f=0.0109\text{m}^2$ , 横構断面積  $A_b=0.0107\text{m}^2$ ,

吊構造重量  $m_s=9.137\text{tf/m}$ , ケーブル重量  $m_c=1.263\text{tf/m}$

拡張理論式(6)あるいは式(9)によって求めた固有円振動数を観測値およびマトリクス変位法による Abdel-Ghaffar の計算値と比較して表 3-5 に掲げる. Abdel-Ghaffar の計算値と観測値は対称振動については第 6 次, 逆対称振動については第 5 次あたりから有意な差を生じており, 何れも計算値が高めの値となっている. これに対して拡張理論による計算値は観測値と良い対応を見せている. 表中に各固有モードについてパラメータ  $P_3$  (固有モードの平均節間距離を用いてせん断パラメータを評価した値) を

表 3-5 Vincent Thomas 橋の鉛直たわみ振動数の比較

次数	パラメータ $P_3$	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村
対 称 振 動				
1	0.000468	0.234	0.221	0.224
2	0.00421	0.365	0.348	0.350
3	0.00412	0.487	0.459	0.465
4	0.0117	0.835	0.803	0.792
5	0.0229	1.450	1.467	1.388
6	0.0371	2.076	2.340	2.071
7	0.0379	2.146	2.352	2.107
8	0.0566	2.871	3.458	2.912
逆 対 称 振 動				
1	0.00187	0.216	0.197	0.199
2	0.00749	0.576	0.549	0.549
3	0.0165	1.022	1.101	1.052
4	0.0168	1.121	1.106	1.071
5	0.0300	1.791	1.881	1.735
6	0.0468	2.505	2.877	2.501

(単位 : c/s)

表 3-6 関門橋の鉛直たわみ振動数 (実測値と計算値の比較)

振動次数	実測値 (c/s)		理論値 (c/s)		備考
	励振実験	走行実験	せん断考慮	せん断省略	
対称1次	0.212	0.202	0.203	0.197	c & s
対称2次	0.298	0.290	0.272	0.263	c & s
対称3次	—	—	0.419	0.420	s
対称4次	0.570	0.557	0.518	0.505	c
対称5次	0.918	0.900	0.862	0.922	c
対称6次	—	1.310	1.270	1.450	c
対称7次	—	1.720	1.723	2.103	c
対称8次	—	—	1.958	2.438	s
対称9次	—	2.125	2.204	2.886	c
対称10次	—	2.525	2.701	3.795	c
逆対称1次	0.180	0.173	0.152	0.153	c
逆対称2次	—	—	0.372	0.380	c
逆対称3次	—	—	0.399	0.407	s
逆対称4次	0.740	0.730	0.678	0.717	c
逆対称5次	—	—	1.059	1.178	c
逆対称6次	—	—	1.139	1.282	s
逆対称7次	—	1.505	1.492	1.766	c
逆対称8次	—	—	1.961	2.483	c
逆対称9次	—	—	2.102	2.715	s
逆対称10次	—	2.332	2.451	3.329	c

変位の卓越径間 c : centre span, s : side span

表 3-7 無次元鉛直たわみ振動数 (対称モード)

次数	$P_1=10,$	$P_1=10,$	$P_1=20,$	$P_1=20,$	$P_1=30,$	$P_1=30,$
	$P_4=0.3$	$P_4=0.5$	$P_4=0.3$	$P_4=0.5$	$P_4=0.3$	$P_4=0.5$
1	88.3 cs	55.2 cs	156.0 cs	100.4 cs	225.4 cs	147.6 cs
	88.3 cs	55.2 cs	156.0 cs	100.4 cs	225.4 cs	147.6 cs
2	131.0 cs	122.6 cs	212.1 cs	201.7 cs	301.9 cs	288.1 cs
	132.1 cs	123.4 cs	212.8 cs	202.2 cs	302.4 cs	288.3 cs
3	179.2 cs	161.8 cs	316.4 cs	309.1 cs	460.3 cs	454.3 cs
	181.4 cs	162.8 cs	319.3 cs	310.5 cs	463.7 cs	455.7 cs
4	281.7 c	281.7 c	395.1 cs	395.0 cs	535.3 cs	535.4 cs
	290.9 c	290.9 c	401.9 cs	402.0 cs	541.0 cs	540.8 cs
5	486.7 c	379.3 s	618.6 c	505.4 s	791.0 c	666.1 s
	521.2 c	398.4 s	646.2 c	520.4 s	812.9 c	678.4 s
6	732.6 c	486.7 c	881.4 c	618.6 c	1084.9 c	791.2 c
	819.7 c	521.2 c	955.0 c	646.2 c	1145.6 c	813.1 c
7	866.8 s	732.6 c	1024.2 s	881.4 c	1243.1 s	1084.9 c
	992.9 s	819.7 c	1133.2 s	995.0 c	1334.6 s	1145.7 c
8	1006.2 c	866.7 s	1170.9 c	1023.8 s	1403.0 c	1242.3 s
	1180.5 c	992.8 s	1323.6 c	1132.7 s	1532.8 c	1333.7 s
9	1297.6 c	1006.2 c	1477.9 c	1170.9 c	1737.4 c	1403.0 c
	1597.3 c	1180.5 c	1746.9 c	1323.6 c	1971.3 c	1532.8 c
10	1599.6 c	1297.6 c	1795.9 c	1477.9 c	2082.2 c	1737.4 c
	2063.3 c	1597.3 c	2218.9 c	1746.9 c	2456.5 c	1971.3 c

上段： $P_3=5 \times 10^{-4}$ ，下段： $P_3=10^{-4}$ ，  
 凡例 cs：centre span, side span ともに変位  
 c：centre span のみ変位  
 s：side span のみ変位

表 3-8 無次元鉛直たわみ振動数 (逆対称モード)

次数	$P_1=10$	$P_1=20$	$P_1=30$
1	74.0 c	131.6 c	192.6 c
	74.2 c	131.7 c	192.6 c
2	149.6 s	235.1 s	331.8 s
	151.2 s	236.1 s	332.6 s
3	197.2 c	293.7 c	406.5 c
	200.9 c	296.2 c	408.3 c
4	377.8 c	499.3 c	653.4 c
	396.8 c	513.8 c	664.6 c
5	449.1 s	577.3 s	743.4 s
	477.7 s	599.8 s	761.0 s
6	605.3 c	745.6 c	993.7 c
	662.2 c	792.4 c	971.5 c
7	866.6 cs	1023.2 cs	1241.2 cs
	992.6 cs	1132.0 cs	1332.2 cs
8	1150.2 c	1322.6 c	1568.4 c
	1382.3 c	1528.7 c	1745.8 c
9	1347.4 s	1530.3 s	1794.2 s
	1671.7 s	1822.3 s	2049.0 s
10	1447.6 c	1635.8 c	1908.7 c
	1827.5 c	1977.2 c	2208.3 c

上段： $P_3=5 \times 10^{-4}$ ，下段： $P_3=10^{-4}$ ，  
 凡例 cs：centre span, side span ともに変位  
 c：centre span のみ変位  
 s：side span のみ変位

併記しているが，トラス橋の固有振動で述べたようにせん断パラメータが 0.02~0.03 を越えるとせん断変形の影響が顕著に現れる特性と符合しているようである。

2 つ目の吊橋は関門橋<sup>3)</sup>で，開通直前に国土交通省（当時建設省土木研究所）により，起振機を用いた励振実験と重量車の走行実験による不規則振動のパワースペクトル分析によって，固有振動数とモードの観測が行われた。関門橋の構造諸元はその報告書を参照されたい。

再び，拡張理論による固有振動数の算定式(6)および(9)と観測データを比較して表 3-6 に示す。計算値としてはせん断変形を考慮した場合と無視した場合の両方を示したが，実測値はせん断変形を考慮した場合と良く対応している。せん断変形を無視した場合は，対称振動モード，逆対称振動モードとも第 5 次モードあたりから有意な差が現れている。

表 3-7 および表 3-8 は，無次元表示した鉛直たわみ固有振動数とその他の力学パラメータの関係を示している。表中の記号 cs は中央径間と側径間のたわみが連成したモード，c および s はそれぞれ中央径間のたわみおよび側径間のたわみが卓越した振動モードを表している。

固有振動特性に対する各構面のせん断変形の影響は，振動モードの平均節間距離が重要である。平均節間距離は当然高次モードになるほど短くなり，せん断パラメータが増大するので固有振動数は減少する結果となる。このことは前節で取り上げたトラス橋，今節の補剛トラス吊橋の固有振動問題に共通の重要事項である。

(3) 水平たわみ振動

1) 振動方程式

せん断変形を考慮した吊構造の水平曲げに関する弾性方程式から出発する。 $\theta_j$  を鉛直軸回りの回転角，

$w_s$  を吊構造の水平変位とすると

$$EI_y \frac{d^2 \theta_y}{dx^2} - GA_z \left( \theta_y + \frac{dw_s}{dx} \right) = \frac{m_s}{g} r_y^2 \frac{d^2 \theta_y}{dt^2} \quad (11)$$

$$-GA_z \left( \frac{d\theta_y}{dx} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) = q_z \quad (12)$$

ここに,  $I_y = EA_c b^2$ ,  $A_z = 2bt_b$ ,  $t_b$ : 横構換算板厚.

分布力は吊構造の慣性力と吊材張力の水平成分を含み,

$$q_z = -\frac{m_s}{g} \frac{d^2 w_s}{dt^2} - m_s \beta \quad (13)$$

と表される.  $w_c$  をケーブルの水平変位とすると, ケーブルにおける釣り合いにより

$$-H_d \frac{d^2 w_c}{dx^2} = -\frac{m_c}{g} \frac{d^2 w_c}{dt^2} + m_s \beta \quad (14)$$

式(12)に式(13)を代入すると

$$-GA_z \left( \frac{d\theta_y}{dx} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) = -\frac{m_s}{g} \frac{d^2 w_s}{dt^2} - m_s \beta \quad (15)$$

式(14)と式(15)に含まれている吊材の傾斜角  $\beta$  は

$$\beta = \frac{w_s - w_c}{\eta(x)} \quad (16)$$

ここに,  $\eta(x)$  は吊材長を表す.

変位  $w_s$ ,  $w_c$  および  $\theta_y$  を座標  $x$  と時間  $t$  に関して変数分離して

$$w_s = w_s e^{-\omega t}, \quad w_c = w_c e^{-\omega t}, \quad \theta_y = \theta_y e^{-\omega t} \quad (17)$$

と表す. 式(11), 式(14)および式(15)に代入すると

$$EI_y \frac{d^2 \theta_y}{dx^2} - GA_z \left( \theta_y + \frac{dw_s}{dx} \right) = -\frac{m_s}{g} r_y^2 \theta_y \quad (18)$$

$$-GA_z \left( \frac{d\theta_y}{dx} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) + m_s \frac{w_s - w_c}{\eta(x)} = \frac{m_s}{g} \omega^2 w_s \quad (19)$$

$$-H_d \frac{d^2 w_c}{dx^2} - m_s \frac{w_s - w_c}{\eta(x)} = \frac{m_s}{g} \omega^2 w_c \quad (20)$$

式(18)~(20)にガラーキン法を適用する.

$$EI_y \int \frac{d^2 \theta_y}{dx^2} \theta_{ym} dx - GA_z \int \left( \theta_y + \frac{dw_s}{dx} \right) \theta_{ym} dx = -\frac{m_s}{g} r_y^2 \omega^2 \int \theta_y \theta_{ym} dx \quad (21)$$

$$-GA_z \int \left( \frac{d\theta_y}{dx} + \frac{d^2 w_s}{dx^2} \right) w_{sm} dx + m_s \int \frac{w_s - w_c}{\eta(x)} w_{sm} dx = \frac{m_s}{g} \omega^2 \int w_s w_{sm} dx \quad (22)$$

$$-H_d \int \frac{d^2 w_c}{dx^2} w_{cm} dx - m_s \int \frac{w_s - w_c}{\eta(x)} w_{cm} dx = \frac{m_s}{g} \omega^2 \int w_c w_{cm} dx \quad (23)$$

## 2) 固有振動数

両支点で単純支持された補剛桁トラスを対象として, 変位および座標関数を以下のように与える.

$$\begin{aligned} w_s &= \sum a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right), & w_{sm} &= \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) \\ w_c &= \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right), & w_{cm} &= \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) \\ \theta_y &= \sum c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right), & \theta_{ym} &= \cos\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

これらの変位および座標関数を式(21)~(23)に代入すると

$$EI_y \left(\frac{m\pi}{L_c}\right)^2 c_m + GA_z c_m + GA_z \frac{m\pi}{L_c} a_m = \frac{m_s}{g} r_y^2 \omega^2 c_m \quad (25)$$

$$GA_z \frac{m\pi}{L_c} c_m + GA_z \left(\frac{m\pi}{L_c}\right)^2 a_m + \frac{2m_s}{L_s} \int \frac{\sum a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) - \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right)}{\eta(x)} dx = \frac{m_s}{g} \omega^2 a_m \quad (26)$$

$$H_d \left(\frac{m\pi}{L_c}\right)^2 a_m - \frac{2m_s}{L_s} \int \frac{\sum a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) - \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right)}{\eta(x)} dx = \frac{m_s}{g} \omega^2 b_m \quad (27)$$

式(25)の右辺の回転慣性の項の影響は一般に小さいので, これを無視すると

$$\left\{ 1 - \frac{1}{1 + EI_y / (GA_z)(m\pi/L_c)^2} \right\} GA_z \left(\frac{m\pi}{L_c}\right)^2 a_m + \frac{2m_s}{L_s} \int \frac{\sum a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) - \sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right)}{\eta(x)} dx = \frac{m_s}{g} \omega^2 a_m \quad (28)$$

式(26)と式(28)より  $a_n$  と  $b_n$  に関する同次方程式が得られ, その係数行列式である振動数方程式を以下の様に表す.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix} - \omega^2 P_{12}^2 \begin{vmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (29)$$

ここで, 固有円振動数は次のように無次元表示している.

$$\omega P_{12} = \omega \sqrt{\frac{m_s L^2}{g EI_y}}$$

部分行列  $\mathbf{A}_{11}$  の対角要素  $a_{mm}^{11}$  は

$$a_{mm}^{11} = \frac{(m\pi)^4}{1 + P_8(m\pi)^2} + 2P_7 S_{mm}$$

非対角要素  $a_{mn}^{11}$  は

$$a_{mn}^{11} = 2P_7 S_{mn}$$

部分行列  $\mathbf{A}_{12}$  の一般要素  $a_{mn}^{12}$  は

$$a_{mn}^{12} = -2P_7 S_{mn}$$

部分行列  $\mathbf{A}_{22}$  の対角要素  $a_{mm}^{22}$  は

$$a_{mm}^{22} = P_6(m\pi)^2 + 2P_7 S_{mm}$$

非対角要素  $a_{mn}^{22}$  は

$$a_{mn}^{22} = 2P_7 S_{mn}$$

部分行列  $\mathbf{B}_{11}$  の対角要素  $b_{mm}^{11}$  は

$$b_{mm}^{11} = 1$$

部分行列  $\mathbf{B}_{22}$  の対角要素  $b_{mm}^{22}$  は

表 3-9 水平横たわみ振動数の比較 (Vincent Thomas 橋, 中央径間対称振動)

次数	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村	卓越成分
1	0.168	0.1730	0.1591	s & c
2	0.542	0.5638	0.6113	s & c
3	0.879	0.8241	0.9326	c
4	1.204	1.2045	1.2533	s & c
5	1.531	1.3407	1.3307	s & c
6		1.6470	1.7204	c
7		2.1256	2.1676	c
8		2.6422	2.6236	c
9		3.1982	3.0833	c
10		3.8697	3.2609	s & c
11		3.7890	3.5453	c
12		4.3963	4.0087	c
13		4.9762	4.4736	c
14*		7.2292	5.7908	s
15*		11.9581	8.6081	s

s : suspended structures, c : cable (単位 : c/s)

表 3-10 水平横たわみ振動数の比較 (Vincent Thomas 橋, 中央径間逆対称振動)

次数	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村	卓越成分
1	0.623	0.5652	0.5541	s & c
2		0.6429	0.6534	s & c
3		0.9957	1.0541	c
4		1.4207	1.4920	c
5		1.8816	1.9399	c
6		2.3643	2.1810	s
7		2.3791	2.3946	c
8		2.9153	2.8530	c
9		3.4899	3.3141	c
10		4.0926	3.7768	c
11		4.6936	4.2406	c
12		5.2328	4.4757	s
13		5.3112	4.7051	c
14*		9.4444	7.1756	s
15*		14.7724	10.0713	s

s : suspended structures, c : cable (単位 : c/s)

$$b_{mm}^{22} = P_9$$

$B_{11}$ ,  $B_{22}$  の非対角項は 0 である. また  $S_{mn}$  は

$$S_{mn} = \int \frac{\sin\left(\frac{mx}{L}\right)\sin\left(\frac{nx}{L}\right)}{\eta(x)} dx$$

### 3) 力学パラメータと固有振動特性

吊橋の水平横たわみ振動に関係する力学パラメータとして

$$P_6 = L_c \sqrt{\frac{H_d}{EI_y}}, \quad P_7 = \frac{m_s L_c^3}{EI_y}, \quad P_8 = \frac{EI_y}{GA_c L^2}, \quad P_9 = \frac{m_c}{m_s}$$

を挙げることができる. このほかにケーブル形状に関する  $P_{10}=L/f$ ,  $P_{11}=L/h_T$  もあるが, 実橋におけるこれらのパラメータの変動は僅少である.

表 3-9 および表 3-10 に示すように, Vincent Thomas 橋の水平横たわみ振動の実測データ<sup>4)</sup>については, 低次の数モードの固有振動数が観測されているが, 横構トラスのせん断変形の影響が顕著に現れる高次モードの測定値はない. そこで, 比較は有限要素法による Abdel-Gaffar と上記の拡張理論の対比となる. 吊橋の水平横たわみ振動の高次モードには, ケーブルと桁の連成するモードは少なく, ケーブルのみあるいは桁のみの振動モードとなる. したがって, ケーブル変位の卓越するモードではせん断変形の影響が現れず, 両者の結果はほぼ一致している. 桁の変位が卓越する振動モードについてはせん断変形によって高次になるほど, Abdel-Gaffar の振動数が高めに評価されている.

### (4) ねじり振動

#### 1) 振動方程式

吊構造が 2 軸対称断面であるとする, 断面変形を含むねじりに関する弾性方程式は 2.7 で説明したように

$$\begin{aligned}
 -A_{\omega} \frac{d^2 \omega}{dx^2} + B_1 \omega + B_2 \frac{d\omega}{dx} + B_1 \frac{d\theta}{dx} &= m_{\omega} \\
 -B_2 \frac{d\omega}{dx} - B_1 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - B_2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} &= m_t \\
 -B_1 \frac{d\omega}{dx} - B_2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - B_1 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + c\theta &= m_{\theta}
 \end{aligned} \tag{30}$$

ここに,  $\phi$  および  $\theta$  はそれぞれ吊構造のそり, ねじれ角および断面変形角を表す. また,  $m_{\omega}$ ,  $m_t$  および  $m_{\theta}$  は慣性力およびケーブル復元力を含めて以下のように表される.

$$\begin{aligned}
 m_{\omega} &= -\frac{m_{\omega}}{g} \frac{d^2 \omega}{dt^2} \\
 m_t &= -m_{\phi 1} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - m_{\phi 2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{b^2 H_d}{4} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{b^2 H_d}{4} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{b H_d}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} \\
 m_{\theta} &= -m_{\phi 2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - m_{\phi 1} \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{b^2 H_d}{4} \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{b^2 H_d}{4} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{b H_d}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}
 \end{aligned} \tag{31}$$

ここに,  $m_{\omega}$ ,  $m_{\phi 1}$ ,  $m_{\phi 2}$  は, 以下のように定義される.

$$\begin{aligned}
 m_{\omega} &= \int y^2 z^2 m dA \\
 m_{\phi 1} &= \int (y^2 + z^2) m dA + \frac{b^2 m_c}{4} \\
 m_{\phi 2} &= \int (y^2 - z^2) m dA + \frac{b^2 m_c}{4}
 \end{aligned}$$

式(31)を式(30)に代入すると

$$\begin{aligned}
 -A_{\omega} \frac{d^2 \omega}{dx^2} + B_1 \omega + B_2 \frac{d\omega}{dx} + B_1 \frac{d\theta}{dx} &= -\frac{m_{\omega}}{g} \frac{d^2 \omega}{dt^2} \\
 -\frac{b H_d}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} - B_2 \frac{d\omega}{dx} - D_1 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - D_2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} &= -m_{\phi 1} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - m_{\phi 2} \frac{d^2 \theta}{dt^2} \\
 -\frac{b H_d}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} - B_1 \frac{d\omega}{dx} - D_2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - D_1 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + c\theta &= -m_{\phi 2} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - m_{\phi 1} \frac{d^2 \theta}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{32}$$

ここに,  $D_1 = B_1 + b^2 H_d / 4$ ,  $D_2 = B_2 + b^2 H_d / 4$

ケーブルの付加水平張力は

$$H_p = -\frac{E_c F_c}{L'_c} \int (\phi + \theta) \frac{b}{2} \frac{d^2 y}{dx^2} dx \tag{33}$$

と表される.

変位  $\omega$ ,  $\phi$ ,  $\theta$  を以下のように座標  $x$  と時間  $t$  とで変数分離する.

$$\omega_s = \omega e^{-\alpha t}, \quad \phi = \phi e^{-\alpha t}, \quad \theta = \theta e^{-\alpha t} \tag{34}$$

式(34)を式(32)に代入し, さらにケーブル付加水平張力  $H_p$  を消去すると,

$$\begin{aligned}
 -A_{\omega} \frac{d^2 \omega}{dx^2} + B_1 \omega + B_2 \frac{d\omega}{dx} + B_1 \frac{d\theta}{dx} &= \frac{m_{\omega}}{g} \omega^2 \omega - B_2 \frac{d\omega}{dx} - D_1 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - D_2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} \\
 -B_2 \frac{d\omega}{dx} - D_1 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - D_2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{16 E_c F_c b^2}{L'_c (f/L'_c)^2} \int (\phi + \theta) dx &= \frac{m_{\phi 1}}{g} \omega^2 \phi + \frac{m_{\phi 2}}{g} \omega^2 \theta \\
 -B_1 \frac{d\omega}{dx} - D_2 \frac{d^2 \phi}{dx^2} - D_1 \frac{d^2 \theta}{dx^2} + c\theta + \frac{16 E_c F_c b^2}{L'_c (f/L'_c)^2} \int (\phi + \theta) dx &= \frac{m_{\phi 2}}{g} \omega^2 \phi + \frac{m_{\phi 1}}{g} \omega^2 \theta
 \end{aligned} \tag{35}$$

式(35)に対してガラーキン法を適用する.

$$-A_{\omega} \int \frac{d^2 \omega}{dx^2} \omega_m dx + B_1 \int \omega \omega_m dx + B_2 \int \frac{d\omega}{dx} \omega_m dx + B_1 \int \frac{d\theta}{dx} \omega_m dx = \frac{m_{\omega}}{g} \omega^2 \int \omega \omega_m dx \tag{36}$$

$$-B_2 \int \frac{d\omega}{dx} \varphi_m dx - D_1 \int \frac{d^2\varphi}{dx^2} \varphi_m dx - D_2 \int \frac{d^2\theta}{dx^2} \varphi_m dx + \frac{16E_c F_c b^2}{L_c'(f/L_c^2)^2} \int (\varphi + \theta) dx \varphi_m dx = \frac{m_{\varphi 1}}{g} \omega^2 \int \varphi \varphi_m dx + \frac{m_{\theta 2}}{g} \omega^2 \int \theta \varphi_m dx \quad (37)$$

$$-B_1 \int \frac{d\omega}{dx} \theta_m dx - D_2 \int \frac{d^2\varphi}{dx^2} \theta_m dx - D_1 \int \frac{d^2\theta}{dx^2} \theta_m dx + c \int \theta \theta_m dx + \frac{16E_c F_c b^2}{L_c'(f/L_c^2)^2} \int (\varphi + \theta) dx \theta_m dx = \frac{m_{\varphi 2}}{g} \omega^2 \int \varphi \theta_m dx + \frac{m_{\theta 1}}{g} \omega^2 \int \theta \theta_m dx \quad (38)$$

3 径間 2 ヒンジ吊橋の固有ねじり振動数を解析する場合は, 中央径間と側径間に対して以下の級数解および座標関数を適用する.

$$\text{中央径間} : \omega = \sum c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right), \quad \omega_m = \cos\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) \quad (39)_{1,2}$$

$$\varphi = \sum d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right), \quad \varphi_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) \quad (39)_{3,4}$$

$$\theta = \sum e_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_c}\right), \quad \theta_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_c}\right) \quad (39)_{5,6}$$

$$\text{側径間} : \omega = \sum c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L_s}\right), \quad \omega_m = \cos\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \quad (39)_{7,8}$$

$$\varphi = \sum d_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_s}\right), \quad \varphi_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \quad (39)_{9,10}$$

$$\theta = \sum e_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L_s}\right), \quad \theta_m = \sin\left(\frac{m\pi x}{L_s}\right) \quad (39)_{11,12}$$

式(36)~(38)に式(39)を代入すると以下の振動数方程式が与えられる.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & A_{15} & 0 \\ & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & A_{26} \\ & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ & & & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ \text{Sym.} & & & & A_{55} & A_{56} \\ & & & & & A_{66} \end{vmatrix} - \omega^2 P_{15} \begin{vmatrix} B_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & B_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & B_{33} & 0 & B_{35} & 0 \\ & & & B_{44} & 0 & B_{46} \\ \text{Sym.} & & & & B_{55} & 0 \\ & & & & & B_{66} \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

固有円振動数  $\omega$  は次のように無次元表示している.

$$\omega L_c \sqrt{\frac{m_{\varphi 1}}{GJ}} = \omega P_{15}$$

式(40)の各部分行列の要素は以下のように無次元パラメータの組み合わせで表される.

$$A_{11} \text{ の対角要素} \quad a_{mm}^{11} = \frac{(m\pi)^2}{P_{13}^2} + \frac{1}{P_{16}}$$

$$A_{13} \text{ の対角要素} \quad a_{mm}^{13} = m\pi \sqrt{\frac{1-P_{16}}{P_{16}}}$$

$$A_{15} \text{ の対角要素} \quad a_{mm}^{15} = \frac{m\pi}{P_{16}}$$

$$A_{22} \text{ の対角要素} \quad a_{mm}^{22} = \frac{2(m\pi)^2}{P_{13}^2 P_{14}} + \frac{2P_4}{P_{16}}$$

$$A_{24} \text{ の対角要素} \quad a_{mm}^{24} = 2m\pi \sqrt{\frac{1-P_{16}}{P_{16}}}$$

$$A_{26} \text{ の対角要素 } a_{mm}^{26} = \frac{2m\pi}{P_{16}}$$

$$A_{33} \text{ の対角要素 } a_{mm}^{33} = (m\pi)^2 \left( P_{14} + \frac{1}{P_{16}} \right) + \frac{512P_2P_{14}}{(m\pi)^2}$$

$$A_{33} \text{ の非対角要素 } a_{mn}^{33} = \frac{512P_2P_{14}}{mn\pi^2}$$

$$A_{34} \text{ の一般要素 } a_{mn}^{34} = \frac{1024P_2P_{14}P_4}{mn\pi^2}$$

$$A_{35} \text{ の対角要素 } a_{mm}^{35} = (m\pi)^2 \left( P_{14} + \sqrt{\frac{1-P_{16}}{P_{16}}} \right) + \frac{512P_2P_{14}}{(m\pi)^2}$$

$$A_{35} \text{ の非対角要素 } a_{mn}^{35} = \frac{512P_2P_{14}}{mn\pi^2}$$

$$A_{36} \text{ の一般要素 } a_{mn}^{34} = \frac{1024P_2P_{14}P_4}{mn\pi^2}$$

$$A_{44} \text{ の対角要素 } a_{mm}^{44} = \frac{2(m\pi)^2}{P_4} \left( P_{14} + \frac{1}{P_{16}} \right) + \frac{2048P_2P_{14}P_4^2}{(m\pi)^2}$$

$$A_{44} \text{ の非対角要素 } a_{mn}^{44} = \frac{2048P_2P_{14}P_4^2}{mn\pi^2}$$

$$A_{45} \text{ の一般要素 } a_{mn}^{45} = \frac{1024P_2P_{14}P_4}{mn\pi^2}$$

$$A_{46} \text{ の対角要素 } a_{mm}^{46} = \frac{2(m\pi)^2}{P_4} \left( P_{14} + \sqrt{\frac{1-P_{16}}{P_{16}}} \right) + \frac{2048P_2P_{14}P_4^2}{(m\pi)^2}$$

$$A_{46} \text{ の非対角要素 } a_{mn}^{46} = \frac{2048P_2P_{14}P_4^2}{mn\pi^2}$$

$$A_{55} \text{ の対角要素 } a_{mm}^{55} = (m\pi)^2 \left( P_{14} + \frac{1}{P_{16}} \right) + 2P_{15}^2 + \frac{512P_2P_{14}}{(m\pi)^2}$$

$$A_{55} \text{ の非対角要素 } a_{mn}^{55} = \frac{512P_2P_{14}}{mn\pi^2}$$

$$A_{56} \text{ の一般要素 } a_{mn}^{56} = \frac{1024P_2P_{14}P_4}{mn\pi^2}$$

$$A_{66} \text{ の対角要素 } a_{mm}^{66} = \frac{2(m\pi)^2}{P_4} \left( P_{14} + \frac{1}{P_{16}} \right) + 4P_4P_{15}^2 + \frac{2048P_2P_{14}P_4^2}{(m\pi)^2}$$

$$A_{66} \text{ の非対角要素 } a_{mn}^{66} = \frac{2048P_2P_{14}P_4^2}{mn\pi^2}$$

$$B_{11} \text{ の対角要素 } b_{mm}^{11} = P_{17}$$

$$B_{22} \text{ の対角要素 } b_{mm}^{22} = 2P_{17}P_4$$

$$B_{33} \text{ の対角要素 } b_{mm}^{33} = 1$$

$$B_{35} \text{ の対角要素 } b_{mm}^{35} = P_{18}$$

$$B_{44} \text{ の対角要素 } b_{mm}^{44} = 2P_4$$

表 3-1-1 ねじり固有振動数の比較  
(Vincent Thomas 橋, 対称振動)

次数	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村	卓越成分
1	0.464	0.4494	0.4698	centre & side
2	0.945	0.9433	0.9260	centre & side
3	1.018	0.9498	0.9979	centre & side
4	1.893	1.8567	1.6601	centre
5	2.780	3.0793	2.4995	centre
6		4.6331	3.3876	side
7		4.6593	3.4330	centre
8		6.6130	4.4330	centre
9		8.9545	5.4760	centre
10		11.6401	6.4579	side
11		11.6920	6.5444	centre
12		14.8394	7.6267	centre
13		18.4134	8.7156	centre
14		22.3098	9.6835	side
15		22.4344	9.8066	centre

(単位 : c/s)

表 3-1-2 ねじり固有振動数の比較  
(Vincent Thomas 橋, 逆対称振動)

次数	測定値	Abdel-Ghaffar	小松・西村	卓越成分
1	0.740	0.5959	0.6547	centre
2	0.806	0.9443	0.9922	side
3	1.425	1.3667	1.3751	centre
4	2.109	2.4073	2.1643	side
5		2.4241	2.1921	centre
6		3.8231	3.1013	centre
7		4.6332	3.5365	side
8		5.5889	4.0810	centre
9		7.6976	5.0410	side
10		7.7352	5.1083	centre
11		10.2728	6.1649	centre
12		11.6402	6.6134	side
13		13.2135	7.2380	centre
14		16.4951	8.2146	side
15		16.5719	8.3194	centre

(単位 : c/s)

$B_{46}$  の対角要素  $b_{mm}^{46} = 2P_{18}P_4$

$B_{55}$  の対角要素  $b_{mm}^{55} = 1$

$B_{66}$  の対角要素  $b_{mm}^{66} = 2P_4$

ここに記していない要素は全て 0 である.

### 3) 力学パラメータと固有振動特性

補剛トラス吊橋のねじりに関する力学パラメータは

$$P_{13} = L_c \sqrt{\frac{GJ}{A_\omega}}, \quad P_{14} = \frac{H_d b_2}{4GJ}, \quad P_{15} = L_c \sqrt{\frac{c}{2GJ}}, \quad P_{16} = \frac{GJ}{B_1}, \quad P_{17} = \frac{m_\omega}{m_{\phi 1} L_c^2}, \quad P_{18} = \frac{m_{\phi 2}}{m_{\phi 1}}$$

Vincent Thomas 橋の実測データの中で, ねじり振動に関する実測値は対称および逆対称モードについてそれぞれ 5 次および 4 次まで得られている. それ以上の高次モードについては, Bleich の吊橋ねじり理論<sup>5)</sup>に Abdel Gaqffar<sup>6)</sup>の有限要素解析結果と本拡張理論による算定値との比較になっている. 表 3-1-1 および表 3-1-2 は, それぞれ対称モードおよび逆対称モードについての比較である. 対称振動モードおよび逆対称振動モードについて, それぞれ 4 次以上の高次モードについて有意な差を生じており, その原因は補剛トラスの 2 次せん断変形を考慮しているか否かの相違である.

補剛トラスの断面変形を省略して 2 次のせん断変形を考慮した固有ねじり振動数は, 式(36)~式(38)において断面変形角を省略し, また 4 次以上の高次モードを対象としてケーブルの付加張力を省略すると

$$-A_\omega \int \frac{d^2 \omega}{dx^2} \omega_m dx + B_1 \int \omega \omega_m dx + B_2 \int \frac{d\phi}{dx} \omega_m dx = 0 \tag{41}$$

$$-B_2 \int \frac{d\omega}{dx} \omega_m dx - D_1 \int \frac{d^2 \phi}{dx^2} \phi_m dx = \frac{m_{\phi 1}}{g} \omega^2 \int \phi \phi_m dx \tag{42}$$

式(39)の級数解と座標関数を代入すると固有ねじり振動数の近似式を得る.

$$\omega P_{19} = m\pi \sqrt{\frac{1 + (m\pi/P_{13})^2 (1 + P_{14} P_{16})}{1 + (m\pi/P_{13})^2 P_{16}}} \tag{43}$$

## 2 次せん断変形の影響は力学パラメータ

$$P_{20} = \frac{P_{16}}{P_{13}^2} = \frac{A_w}{B_1 L_c^2} \quad (44)$$

で評価される. このパラメータ  $P_{20}$  は, 鉛直たわみにおけるせん断パラメータ  $P_3$  および水平横たわみにおける  $P_8$  に対応するものである.

**3. 3の参考文献**

- 1) 小松定夫・西村宣男:長大吊橋の固有振動に対する吊構造せん断変形の影響, 土木学会論文報告集, No.323, 1982.
- 2) Abdel-Ghaffar,A.M. : Vertical vibration analysis of suspension bridges, Proc.ASCE, Vol.106, ST10,1980.
- 3) 建設省土木研究所: 関門橋振動実験報告書, 土木研究所資料 931 号, 1974.
- 4) Abdel-Ghaffar,A.M. : Free lateral vibration of suspension bridges, Proc.ASCE, Vol.104, ST30,1978.
- 5) Bleich,F. : The mathematical theory of vibration in suspension bridges, US Government Printing Office, Washington D.C., 1950 .
- 6) Abdel-Ghaffar,A.M. : Free torsional vibration of suspension bridges, Proc.ASCE, Vol.105, ST4,1979.

### 3. 4 2 主桁橋梁架設系の安定性

#### (1) はじめに

支間長と主構造（主構あるいは主桁）の間隔比が大きい構造は，全体系の安定性に留意した設計が必要となる場合が多い．完成時の構造系は床版を含めてねじり剛性が大きい閉断面構造とする場合が多いが，架設時の構造系が閉断面を構成しない場合は更に注意が必要である．そのような構造の例に側道 2 主桁橋がある．1970 年代，我が国において幅員の狭い道路における歩行者の交通安全対策として歩道の併設が盛んに行われるようになった．橋梁部分では既設橋梁に歩道を添架することは，既設橋梁の負担を強いることになるので，既設橋梁に並行して独立に歩行者・軽車両専用橋を設置する対策が数多く採用された．これが側道橋である．

側道橋の橋脚は側道橋自体のスケールに合わせて決めるのではなく，河川の流れを阻害しないように既設橋梁の橋脚位置に合わせることを河川管理者から求められる．側道橋の幅員は 1.5m から 2.5m 程度と一般橋梁に比べて狭いから，側道橋は，勢い，平面形状がスレンダーな橋梁となる．床版コンクリート打設時に落橋事故が発生した大雲橋の側道橋は支間長 64.25m，主桁間隔が 1.8m，従ってスパン・主桁間隔比 35.7 の極めてスレンダーな形状であった．

2 主桁橋であっても橋梁形式によっては架設時の不安定現象を回避できる場合があるが，2 本の主桁を横桁のみで連結した形式<sup>1)</sup>（以下では横桁連結形式と称す）と対傾構と下横構とで連結した形式<sup>2)</sup>（横構連結形式と称す）については，架設時に不安定現象を生ずる可能性があることを以下に説明する．

横構連結形式の側道橋では作用モーメントに合わせて主桁フランジのサイズを数段階にわたり変化させる場合が多い．剛性，死荷重および死荷重の作用位置が橋軸方向に変化するから，この構造の座屈強度を厳密に計算するにはマトリックス変位法が適している．しかし関与する力学パラメータを特定し座屈特性への関わりを明らかにするために，1 次元化理論による拡張骨組力学を適用する．なおこの種の 2 主桁橋の全体横ねじれ座屈現象は床版コンクリート打設時，すなわち弾性状態における不安定現象であるから，厳密解析手法としては主桁にシェル要素を適用した有限要素法ではなく，部材のそりねじりを考慮した節点変位自由度 7 のマトリックス変位法が適っている．

なお 1990 年代の中頃から合理化 2 主桁橋が多数建設されるようになり，それらの架設時における安定性の検討が求められている．側道 2 主桁橋とは形状は類似しているが，構造諸量が異なるために力学特性を論ずるには別途の検討が必要である<sup>4)</sup>．ここでは合理化 2 主桁橋の問題は扱わない．

#### (2) 横桁連結形式 2 主桁橋

##### 1) 構造モデル

2 本の主桁を横桁のみで連結した梯子状の橋梁形式を横桁連結形式 2 主桁橋と称する．横桁による 2 本の主桁を一体として機能させる効果は，ねじれ変形に対して有効に発揮されるが，水平横方向曲げに関しては必ずしも十分に発揮されるとは言い難い．構造モデルとしては 2. 4 で述べたフィーレンディール桁と見なされ，主桁および横桁の水平面内曲げ剛性が直接橋梁断面としての水平面内曲げ剛性に関係し，主桁断面をフランジとする曲げ剛性が完全に発揮される構造ではないことに注意を要する．また主桁と横桁がフィーレンディール桁としての剛性を発揮するには主桁と横桁のフランジ同士が直接連結される格点構造が必要であるが，そのような実構造は殆ど見受けられないので，構造のモデル化に当たっては，格点構造の局部変形を何らかの方法によって考慮する必要がある．特にマトリックス変位法

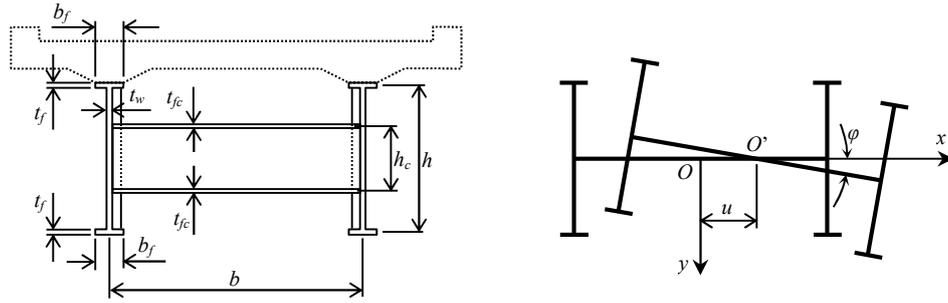


図 3-2-1 横桁連結形式 2 主桁橋

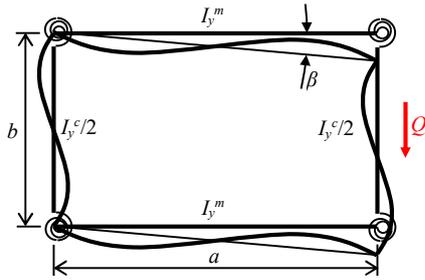


図 3-2-2 パネルのせん断変形

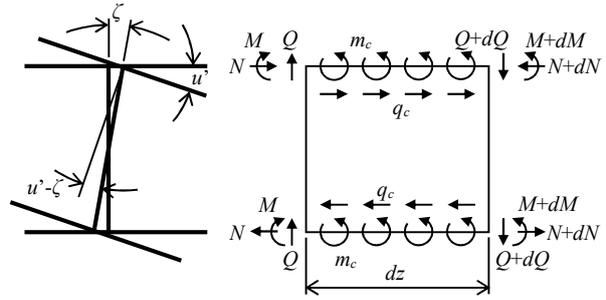


図 3-2-3 断面力の釣り合い

による場合, 格点における局部変形はポイント要素 (回転バネ) を採用するなどの工夫が必要である.

上記の構造条件を考慮して, 拡張骨組理論による 2 主桁橋の全体横ねじれ座屈方程式を誘導するための構造モデルは, 図 3-2-1 に示すような 2 軸対称断面で水平面内曲げに関して主桁と横桁の間に局部変形を考慮するための回転バネを有するものとする.

### 2) 座屈方程式の誘導

図 3-2-2 に示すように横桁間を取り出した 1 パネルに水平横方向せん断力 \$Q\$ が作用するとき, 部材回転角 \$\beta\$ (曲げに伴うせん断変形に相当する) と節点モーメント \$M\_c\$ の関係は

$$\beta = \left( \frac{\lambda I_y^c + 2bI_y^m}{EI_y^c I_y^m} + \frac{12}{K_\theta} \right) \frac{Q\lambda}{24} \quad (1)$$

$$M_c = \frac{Q}{4} = \frac{6EI_y^c I_y^m K_\theta}{(\lambda I_y^c + 2bI_y^m) K_\theta + 12EI_y^c I_y^m} \beta \quad (2)$$

ここに, \$I\_y^m\$, \$I\_y^c\$ はそれぞれ主桁および横桁の鉛直軸回りの断面 2 次モーメント, \$K\_\theta\$ は回転バネの剛性を表す. 横桁および回転バネの剛性は隣接パネルとの重複を考慮して, それぞれ 1/2 とする.

2 本の主桁の軸方向変位差による橋断面の鉛直軸回りの回転角 \$\zeta\$, 主桁のたわみ角を \$dw/dx\$ とすると, \$(dw/dx - \zeta)\$ は前項のせん断変形角 \$\beta\$ に相当する.

$$M_c = \frac{6EI_y^c I_y^m K_\theta}{(\lambda I_y^c + 2bI_y^m) K_\theta + 12EI_y^c I_y^m} \left( \frac{dw}{dx} - \zeta \right) \quad (3)$$

$$Q_c = \frac{2M_c}{b} = \frac{6EI_y^c I_y^m K_\theta}{(\lambda I_y^c + 2bI_y^m) K_\theta + 12EI_y^c I_y^m} \left( \frac{dw}{dx} - \zeta \right) \quad (4)$$

そこで, 図 3-2-3 のように \$M\_c\$, \$Q\_c\$ を主桁の軸方向に沿って分布する内力 \$m\_c\$, \$q\_c\$ とし, 微小区間 \$dx\$ における力の釣り合いを考える. \$Z\$ 方向の力の釣り合いより

$$2EI_y^m \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{EA_m b^2}{2} \frac{d^3 \zeta}{dx^3} = 2p \quad (5)$$

ここに,  $p$  は各主桁に作用する水平横方向分布力である.

式(5)および(6)より  $\zeta$  を消去すると

$$2EI_y^g \frac{d^4 w}{dx^4} - EK \frac{d^6 w}{dx^6} = 2p - \kappa \frac{d^2 p}{dx^2} \quad (6)$$

$$\text{ここに, } EI_y^g = 2EI_y^m + \frac{EA_m b^2}{2}, \quad \kappa = \frac{(b^2 \lambda I_y^c + 2b^2 \lambda I_y^m) K_\theta + 12b^2 \lambda EI_y^c I_y^m}{12EI_y^c I_y^m K_\theta} A_m$$

式は **2. 5** の 3 層積層ばりの特別な場合として誘導した弾性方程式と同じ性質を有している.

横桁により橋の横断面変形が防止されていると考えると, 橋断面のねじり剛性は両側主桁のねじり剛性の和, そりねじり剛性は主桁のそりねじり剛性と間隔  $b$  の両側主桁の鉛直曲げ剛性が構成するそりねじり剛性の和で表される.

$$GJ^g = 2GJ^m, \quad EC_w^g = 2EC_w^m + \frac{b^2 EI_z^m}{2}$$

鉛直等分布荷重  $p_y$  が橋断面のせん断中心から  $e_y$  の高さに作用し, かつ鉛直面内曲げモーメント  $M_z$  (2本の主桁の曲げモーメントの和) が作用している場合, 水平横方向およびねじれに関する釣り合いより以下の横ねじれ座屈方程式が与えられる.

$$EI_y^g \frac{d^4 w}{dx^4} - EK \frac{d^6 w}{dx^6} + m_z \frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{\kappa M_z}{2} \frac{d^4 \phi}{dx^4} = 0 \quad (7)$$

$$M_z \frac{d^2 w}{dx^2} - GJ^g \frac{d^2 \phi}{dx^2} + EC_w^g \frac{d^4 \phi}{dx^4} - p_y e_y \phi = 0 \quad (8)$$

### 3) 座屈荷重の簡易評価式

#### 等モーメントを受ける単純桁の座屈モーメント

両支点において鉛直変位, 水平変位およびねじれ角が拘束され, 断面のそり変位が拘束されていない理想的な境界条件のもとで水平変位およびねじれ角を

$$w = C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \phi = C_2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (9)$$

と表して, 座屈方程式(7)および(8)に Galerkin 法を適用すると, 座屈モーメントは

$$\frac{(M_z)_{cr} L}{EI_y^g} = \gamma_1 \frac{r_x}{L} = \pi \sqrt{\frac{C_1 C_2}{C_3}} \frac{r_x}{L} \quad (10)$$

ここに,  $C_1 = \pi^2 + P_1^2$

$$C_2 = 1 + \left(\frac{\pi}{P_2}\right)^2 \frac{P_3 - 2}{P_3} \frac{2 + P_4(1 + 12P_5)}{12P_4}$$

$$C_3 = 1 + \left(\frac{\pi}{P_2}\right)^2 (P_3 - 2) \frac{2 + P_4(1 + 12P_5)}{24P_4}$$

この問題に関与している力学パラメータは以下の通りである.

$$\text{橋断面のねじり定数比: } P_1 = \sqrt{GJ^g / (EC_w^g)} L$$

$$\text{パネル数: } P_2 = L/\lambda$$

$$\text{橋断面と主桁の水平面内断面 2 次モーメント比: } P_3 = I_y^g / I_y^m$$

主桁と横桁の水平面内剛比:  $P_4 = \lambda I_y^c / (b I_y^m)$

主桁の曲げ剛性と主桁・横桁取り付け部の回転バネ剛性の比:  $P_5 = EI_y^m / (\lambda K_\theta)$

等分布荷重を受ける単純桁の座屈荷重

等曲げの場合と同様に式(7)および(8)に Galerkin 法を適用すると満載等分布荷重を受ける場合の無次元表示した座屈荷重は

$$\frac{(p_y)_{cr} L^3}{EI_y^g} = \gamma_2 \frac{r_x}{L} = \frac{42.35r_x - \eta C_2 + \sqrt{(\eta C_2)^2 + 0.466C_1 C_2 C_3'}}{C_3'} \quad (11)$$

と与えられる。

ここに,  $\eta = e_y / r_x$

$$C_3' = 1 + 0.522 \left( \frac{\pi}{P_2} \right)^2 (P_3 - 2) \frac{2 + P_4(1 + 12P_5)}{12P_4}$$

上記の力学パラメータに加えて,  $\eta$  と  $L/r_x$  を挙げることができる。

式(10)および(11)で与えられた 2 主桁橋架設系の弾性横ねじれ座屈荷重の精度はマトリックス変位法に基づいて作成された骨組構造の固有値解析プログラム (BUCK-PG) 結果との比較によって確認されている。

図 3-24 に示す構造モデルで, 表 3-1 に示す力学パラメータを有する 7 ケースを考える。

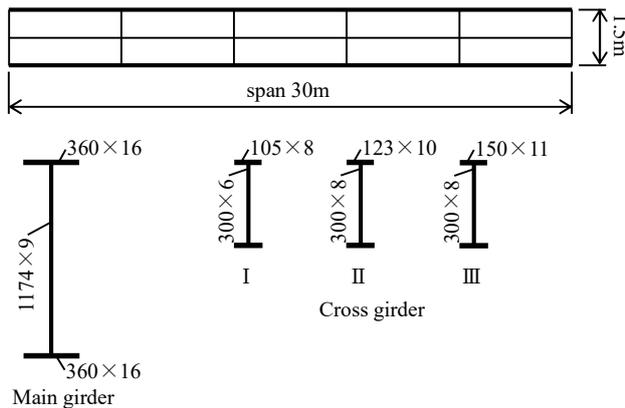


図 3-24 横桁連結形式 2 主桁橋の比較計算モデル

表 3-1 比較計算モデルのパラメータ

Model No.	Parameter					Cross girder
	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	
1				0.06		I
2				0.12	0.0	II
3				0.239		III
4	0.38	5	204		1.0	II
5				0.12	5.0	
6					10.0	
7					50.0	

表 3-3 等分布荷重を受ける場合の座屈荷重の比較

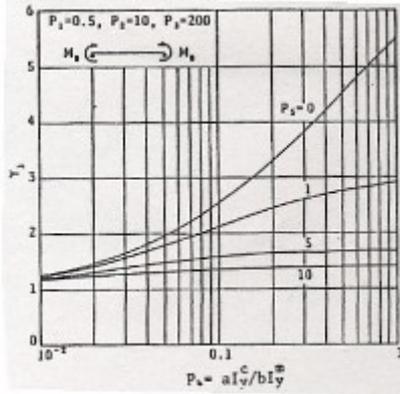
Model No.	Proposed Eq.(11) $A=(M_0)_{cr}$	BUCK-PG $B=(M_0)_{cr}$	A/B
$\eta=0.0$			
1	3.926 t/m	3.868 t/m	1.015
2	4.703 t/m	4.685 t/m	1.004
3	5.835 t/m	5.829 t/m	1.001
4	4.067 t/m	4.120 t/m	0.987
5	3.378 t/m	3.399 t/m	0.994
6	3.165 t/m	3.148 t/m	1.005
7	2.935 t/m	2.852 t/m	1.029
$\eta=1.24$			
1	3.641 t/m	3.637 t/m	1.001
2	4.297 t/m	4.347 t/m	0.989
3	5.218 t/m	5.305 t/m	0.984
4	3.762 t/m	3.858 t/m	0.975
5	3.166 t/m	3.088 t/m	1.025
6	2.979 t/m	2.994 t/m	0.995
7	2.774 t/m	2.730 t/m	1.016

表 3-2 等曲げを受ける場合の座屈モーメントの比較

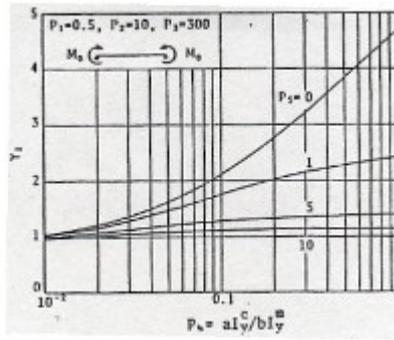
Model No.	Proposed Eq.(11) $A=(M_0)_{cr}$	BUCK-PG $B=(M_0)_{cr}$	A/B
1	392.2 tm	402.1 tm	0.975
2	469.8 tm	487.3 tm	0.964
3	583.0 tm	606.5 tm	0.961
4	406.2 tm	427.3 tm	0.951
5	337.5 tm	350.0 tm	0.964
6	316.3 tm	326.4 tm	0.969
7	293.2 tm	295.6 tm	0.992

1tm=9.8kNm

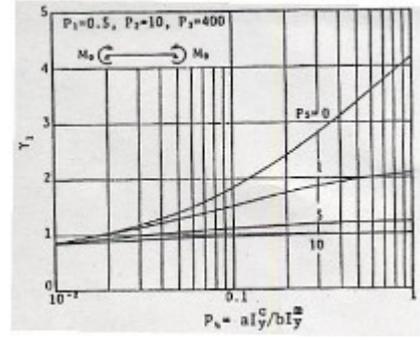
1t/m=9.8kN/m



(a)  $P_3=200$

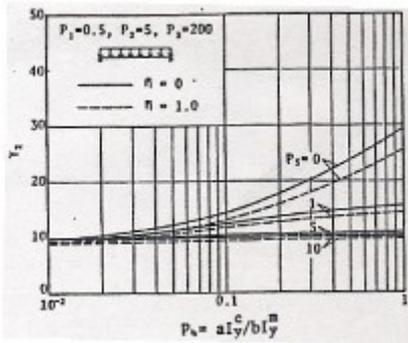


(b)  $P_3=300$

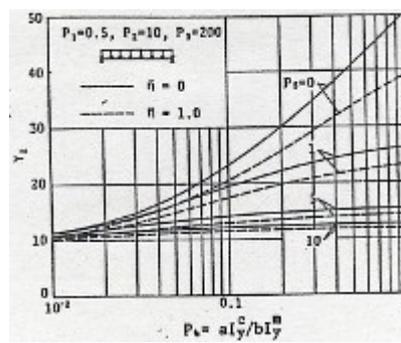


(c)  $P_3=400$

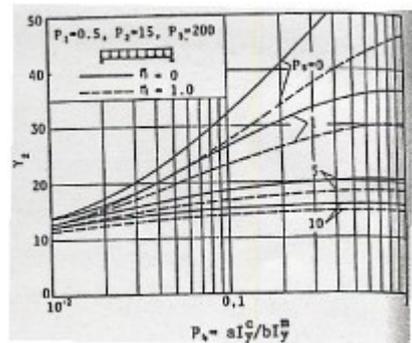
図 3-25 係数  $\gamma_1$  (横桁連結形式)



(a)  $P_2=200$



(b)  $P_2=300$



(c)  $P_2=400$

図 3-26 係数  $\gamma_2$  (横桁連結形式)

表 3-2 に等曲げを受ける場合の座屈モーメント, 表 3-3 に等分布荷重を受ける場合の座屈荷重について簡易評価式(10)および(11)による値と BUCK-PG の結果を比較して示す. 等分布荷重の作用位置は主桁のせん断中心の高さとした場合 ( $\eta=0.0$ ) と上フランジの高さとした場合 ( $\eta=1.24$ ) としている. 簡易評価式と BUCK-PG の結果は良好に対応しており, 拡張骨組理論に基づく簡易評価式の有効性が確認できる.

#### 4) 力学パラメータと座屈特性

横桁で連結された 2 主桁橋架設系の横ねじれ座屈特性に最も大きく影響するパラメータは, 構造の細長さを代表する  $L/r_z$  と横桁の拘束効果に関係した  $P_4$  である. 図 3-25 および図 3-26 にはそれぞれ式(10)および式(11)に含まれる係数  $\gamma_1$  および  $\gamma_2$  とパラメータ  $P_4$  の関係を示す. これらの特性図より座屈強度に対する横桁の鉛直軸回りの曲げ剛性の効果を判断することができる.

格点構造と回転バネの関係や簡易評価式の適用上の注意事項に関する詳細は文献 1) を参照されたい.

### (3) 横構連結形式 2 主桁橋

#### 1) 構造モデル

2 本の主桁間に適切な間隔の対傾構と横構を配置した 2 主桁橋は支間長が 25m を超える側道橋に最も一般的に採用されている構造形式である. 対傾構は橋梁の断面形状を保持するため, また横構は 2 本の主桁が水平面内曲げに対してフランジとして有効に機能するように設置される. 一般には上路形式で, 主桁の上に設置されるコンクリート床版が剛性を発揮する完成系の構造は主桁ウェブ, 横構およびコンクリート床版がねじり剛性が高い閉断面を構成し安定しているが, 床版コンクリートが硬化する前の架設時, すなわちコンクリート打設時においても安定性が確保されるように計画する必要がある. 架設時

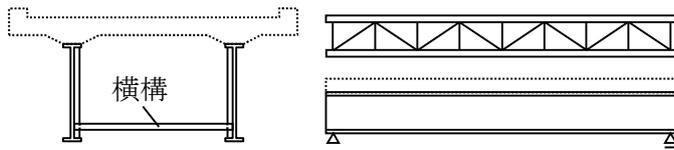


図 3-27 横構連結形式 2 主桁橋の構造モデル

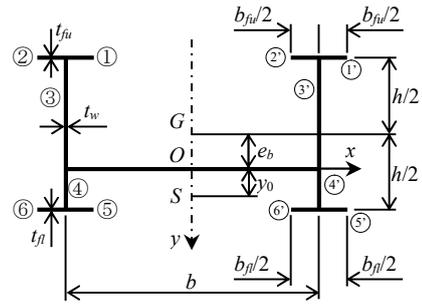


図 3-28 横構連結形式 2 主桁橋の断面

の構造系は，1 面の横構（多くの場合主桁ウェブの下フランジ近くに設置される）によって 2 本の主桁を連結した開断面構造であり，全体横ねじれ座屈に対して注意が必要な構造である。

拡張骨組理論による座屈方程式を誘導する際に，図 3-27 のような構造モデルを考える．両側の主桁断面は相等しく，橋断面は 1 軸対称である。

### 2) 座屈方程式の誘導

このような開断面はりの横ねじれ座屈に関しては，Vlasov や Burgermeister の 1 軸対称断面薄肉ばりを対象とした座屈理論があるが，水平横方向曲げに付随する横構面のせん断変形を考慮できないので，新しく拡張骨組理論により弾性座屈方程式を誘導する。

図 3-28 に示す両側の主桁ウェブの midpoint を結ぶ線と断面の対称軸の交点を M とし，点 M の下方  $e_b$  の位置に取り付けられた横構の midpoint を座標の原点とする。

横ねじれ座屈を対象とした現象における一般化変位としては，水平横方向変位  $w$ ，たわみ角  $dw/dx$ ， $y$  軸回りの断面の回転角  $\theta$ ，断面のねじり各  $\varphi$  およびねじり率  $d\varphi/dx$  の 5 変位自由度である。

図 3-28 に示す 13 個の折板要素について面内力を変位表示する．折板要素の微小区間  $dx$  について面内力の釣り合いを考える．隣接要素からの伝達力を  $q_i, q_{i+1}$  と表すと

$$\frac{dN_i}{dx} = -q_i + q_{i+1} \tag{12}$$

$$Q_i = \frac{dM_i}{dx} - (q_i + q_{i+1}) \frac{c_i}{2} \tag{13}$$

横構面に相当する要素⑦では  $q_i = q_{i+1}$  であり，かつモーメントは作用しないから

$$Q_7 = (-q_3 + q_4) b \tag{14}$$

となる．各折板要素の midpoint の変位を一般化変位で表示すると

$$\begin{aligned} U_i &= -z_i \theta_y - z_i y_i \frac{d\varphi}{dx} - \left( \frac{b}{2} - |z_i| \right) \frac{dw}{dx} \\ V_i &= z_i \varphi \\ W_i &= w - y_i \varphi \end{aligned} \tag{15}$$

ただし，要素⑦については

$$U_i = 0, \quad V_i = 0, \quad W_i = w \tag{16}$$

要素に関する面内力と変位の関係は

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dx} &= Et_i c_i \frac{d^2 U_i}{dx^2} \\ Q_i &= EI_i \frac{d^3 U_i}{dx^3} - (q_i + q_{i+1}) \frac{c_i}{2} \quad (\text{Flange element}) \\ Q_i &= EI_i \frac{d^3 V_i}{dx^3} - (q_i + q_{i+1}) \frac{c_i}{2} \quad (\text{Web element}) \end{aligned} \quad (17)$$

ここに,  $t_i$ : 要素の板厚,  $I_i = t_i c_i^3 / 12$

と表される.

全ての折板要素の面内力を一般化座標で表示し, 橋断面について水平横方向およびねじれに関する外力との釣り合いを取ると,

$$2EI_y^m \frac{d^4 w}{dx^4} + 2E \left\{ I_y^{fu} \left( \frac{h}{2} + e_b \right) - I_y^{fl} \left( \frac{h}{2} - e_b \right) \right\} \frac{d^4 \phi}{dx^4} + \frac{EA_m b^2}{2} \frac{d^3 \theta_y}{dx^3} - \frac{EA_m e_b b^2}{2} \frac{d^4 \phi}{dx^4} - E(A_{fu} - A_{fl}) \frac{h^2 b^2}{4} \frac{d^4 \phi}{dx^4} = 2p_z \quad (18)$$

$$EC_w^g \frac{d^4 \phi}{dx^4} - GJ^g \frac{d^2 \phi}{dx^2} + 2E \left\{ I_y^{fu} \left( \frac{h}{2} + e_b \right) - I_y^{fl} \left( \frac{h}{2} - e_b \right) \right\} \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{EA_m e_b b^2}{2} \frac{d^3 \theta_y}{dx^3} - E(A_{fu} - A_{fl}) \frac{h^2 b^2}{4} \frac{d^4 \theta_y}{dx^4} = m_i \quad (19)$$

ここに,  $A$ ,  $I_y$ ,  $C_w$ ,  $J$  はそれぞれ断面積, 断面 2 次モーメント, そりねじり抵抗およびねじり抵抗で, 添え字  $g$ ,  $m$ ,  $fu$ ,  $fl$  はそれぞれ橋断面, 主桁, 上フランジおよび下フランジに関する諸量を表す. また  $2p_z$ ,  $m_i$  は原点  $O$  に作用する内力である.

ところで, 橋断面の鉛直軸回り回転角  $\theta_y$  と横構面のせん断ひずみ  $\gamma$  およびたわみ角  $dw/dx$  の間に

$$\theta_y = \frac{dw}{dx} - \gamma \quad (20)$$

の関係がある. この形式の橋梁では, 水平横方向せん断力の大部分は横構によって伝達されるから, せん断ひずみは近似的に

$$\gamma = \frac{Q_z^g}{Gbt_b^*} \quad (21)$$

ここに,  $t_b^*$  は横構面の換算板厚である. (2. 4 参照)

式(20)と式(21)より

$$\frac{d^3 \theta_y}{dx^3} = \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{2}{Gbt_b^*} \frac{d^2 p_z}{dx^2} \quad (22)$$

鉛直面内に曲げモーメント  $M_z$  と等分布荷重  $p_y$  が作用する場合, 横ねじれ座屈に関する分布内力は以下のように表される.

$$p_z = -\frac{1}{2} \frac{d^2 (M_z \phi)}{dx^2}$$

$$m_i = -M_z \frac{d^2 w}{dx^2} + 2\beta_y \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( M_z \frac{d\phi}{dx} \right) + p_y e_y \phi$$

ここに,  $\beta_y = \frac{1}{J_y^g} \int_F y(y^2 + z^2) dF$ ,  $e_y$  は荷重  $p_y$  の作用点と横構面の距離を表す.

式(18), (19), (22)および(23)より,  $\theta_y$ ,  $p_z$  および  $m_i$  を消去して整理すると, 横構・対傾構で連結された 2 主桁橋架設系の横ねじれ座屈方程式が与えられる.

$$2EI_y^m \frac{d^4 w}{dx^4} + E \left[ 2 \left\{ I_y^{fu} \left( \frac{h}{2} + e_b \right) - I_y^{fl} \left( \frac{h}{2} - e_b \right) \right\} - \left\{ A_m e_b - (A_{fu} - A_{fl}) \frac{h}{2} \right\} \frac{b}{2} \right] \frac{d^4 \phi}{dx^4} + \frac{d^2 (M_z \phi)}{dx^2} - \frac{EA_m b^2}{2Gbt_b^*} \frac{d^4 (M_z \phi)}{dx^4} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 EC_w^g \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - GJ^g \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + 2E \left\{ I_y^{fu} \left( \frac{h}{2} + e_b \right) - I_y^{fl} \left( \frac{h}{2} - e_b \right) \right\} \frac{d^4 w}{dx^4} - E \left\{ A_m e_b + (A_{fu} - A_{fl}) \frac{h}{2} \right\} \frac{b^2}{2} \frac{d^4 w}{dx^4} + M_z \frac{d^2 w}{dx^2} \\
 - 2\beta_y \frac{d}{dx} \left( M_z \frac{d}{dx} \right) - p_y e_y \varphi + \frac{Eb^2}{4Gbt_b^*} \left\{ 2A_m e_b + (A_{fu} - A_{fl}) h \right\} \frac{d^4 (M_z \varphi)}{dx^4} = 0
 \end{aligned} \tag{25}$$

3) 座屈荷重の簡易評価式

両側支点において鉛直変位および水平横方向変位が拘束され、y 軸および z 軸回りの回転とそり変位が自由である理想的境界条件の単純桁に対して、水平変位およびねじれ角を以下のように仮定する。

$$w = C_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \varphi = C_2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{26}$$

等モーメントを受ける単純桁の座屈モーメント

座屈方程式(24), (25)に Galerkin 法を適用する。座屈モーメントは以下の行列式の根として与えられる。

$$\begin{vmatrix}
 EI_y^g s^2 & (D_1 - D_2) s^2 - \left( 1 + \frac{EA_m b^2}{2Gbt_b^*} s^2 \right) M_0 \\
 (D_1 - D_2) s^2 - M_0 & EC_w^g s^2 + GJ^g + \left( 2\beta_y + \frac{D_1}{2Gbt_b^*} s^2 \right) M_0
 \end{vmatrix} = 0 \tag{27}$$

$$\text{ここに, } D_1 = 2 \left\{ EI_y^{fu} \left( \frac{h}{2} + e_b \right) - EI_y^{fl} \left( \frac{h}{2} - e_b \right) \right\}$$

$$D_2 = E \left\{ A_m e_b + (A_{fu} - A_{fl}) \frac{h}{2} \right\} \frac{b^2}{2}$$

$$S = \pi/L$$

また、 $D_1 - D_2 = -\gamma b EI_y^g$  の関係がある。

さらに簡単な座屈公式を導くために、主桁の上下フランジが等しい場合を考え、かつ微小項を省略すると

$$\frac{(M_0)_{cr} L}{EI_y^g} = \frac{\pi^2 r_z}{LC_1} \sqrt{C_1 \eta + \left( \frac{2e_b}{r_z} \right)^2 - \frac{2e_b}{r_z}} \tag{28}$$

ここに、 $C_1 = 1 + \pi^2 P_4^*$ 、 $r_z$  : 主桁の断面 2 次半径

$$\eta = 1 + \frac{2}{P_3} \left\{ \left( \frac{h}{2r_z} \right)^2 + 4 \left( \frac{e_b}{r_z} \right)^2 \right\}$$

上式には 5 つの無次元パラメータが含まれているが、それらの力学的意味は以下の通りである。

$e_b/r_z$  : 横構取り付け位置に関するパラメータ

$h/r_z$  : 主桁高さと同軸半径の比

$L/r_z$  : 主桁の細長比

$P_3 = I_y^g / I_y^m$  : 橋断面と主桁の断面 2 次モーメント比

$P_4^* = EI_y^g / (Gbt_b^*)$  : 横構のせん断変形に関するパラメータ

等分布荷重を受ける単純桁の座屈荷重

単純桁に等分布荷重満載状態の座屈荷重は式(26)の変位モードを仮定することによって、座屈方程式の係数行列式の根として与えられる。

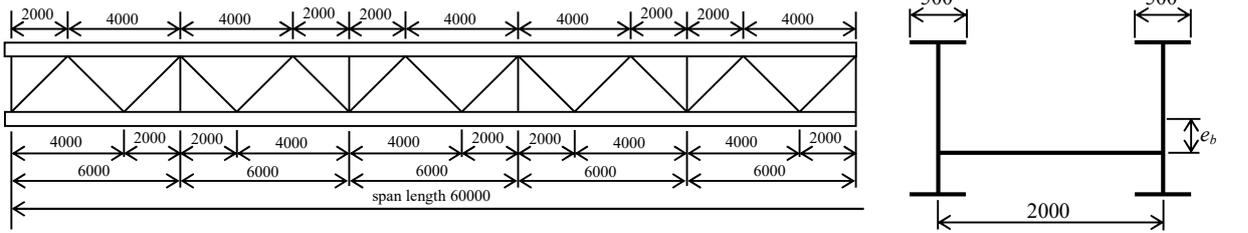


図 3-29 比較計算用構造モデル

表 3-4 拡張骨組理論とマトリクス変位法による計算結果の比較

No.	$e_b/r_x$	$P_4^*$	Equal end moments			Uniformly distributed load at centroid			Uniformly distributed load at upper flange				
			Eq. (37) A tm	BUCK-PG B tm	A/B	$e_b/r_x$	Eq. (39) A tm	BUCK-PG B tm	A/B	$e_b/r_x$	Eq. (39) A tm	BUCK-PG B tm	A/B
1	0.4	0.014	2366	2436	0.971	0.4	6.091	6.161	0.989	1.57	4.242	4.351	0.975
2	0.7	0.014	1640	1679	0.977	0.7	4.182	4.250	0.984	1.87	3.172	3.256	0.974
3	1.0	0.014	1246	1277	0.976	1.0	3.178	3.233	0.983	2.17	2.554	2.619	0.975
4	0.4	0.05	2234	2300	0.971	0.4	5.749	5.814	0.989	1.57	4.108	4.212	0.975

$$\left| \begin{array}{cc} EI_y^g s^4 & (D_1 - D_2)s^4 - \frac{p_y(\pi^2 + 3)}{12} \left( 1 + \frac{EA_m b^2 s^2}{2Gbt_b} \right) \\ (D_1 - D_2)s^4 - \frac{p_y(\pi^2 + 3)}{12} & EC_w^g s^4 + GJ_g s^2 + p_y \left( 2\beta_y \frac{\pi^2 - 3}{12} - e_y + \frac{D_2 \pi^2 L^2}{Gbt_b} \frac{\pi^2 + 3}{12} \right) \end{array} \right| = 0 \quad (29)$$

主桁が 2 軸対称断面の場合，座屈荷重は微小項を省略して

$$\frac{(p_y)_{cr} L^3}{EI_y^g} = \frac{42.345r_z}{LC_1} \sqrt{4.601C_1 \eta + C_2^2 - C_2} \quad (30)$$

ここに， $C_2 = e_y/r_z + 3.29e_b/r_z$

と表される。

座屈荷重の簡易算定式(28)および式(30)の適用性を検討するために，図 3-29 に示す構造モデル ( $L/b=30$ ) について，骨組立体構造のマトリクス変位法による座屈解析ソフト BUCK-PG による結果と比較した。等曲げを受ける場合，等分布荷重が主桁の図心の高さに作用する場合，同じく等分布荷重が主桁の上フランジの高さに作用する場合について計算し，表 3-4 に結果を示す。何れの荷重ケースについても簡易算定式は若干安全側の数値を与えており，実用計算法としての有用性を示している。

前出のパラメータの他に，荷重  $p_y$  の作用位置に関するパラメータ  $e_y/r_z$  が追加される。

ところで，式(28)および式(30)で与えた座屈荷重算定式は，単純桁が両側支点で理想的に支持された境界条件に対するものであるが，実構造の支持条件は単純支持と称していても，立体変形に対しては理想的境界条件とは異なっている。すなわち，一般的に単純桁は固定支点と可動支点とで支持されているが，固定支点の両主桁の支承は橋軸方向変位が拘束されているので，鉛直軸回りの橋断面の回転角およびそりが半固定状態になっている。このような実際的な境界条件に対する座屈荷重の算定式は少々複雑である。より詳細な簡易評価法については文献 2) を参照されたい。

#### 4) 力学パラメータと座屈特性

横構連結形式 2 主桁橋の架設時構造系の全体横ねじれ座屈特性に関する力学パラメータは等曲げに関して 5 個，等分布荷重に関して 6 個を挙げた。この形式の側道 2 主桁橋の架設時（床版コンクリート打設時）の弾性座屈特性と力学パラメータの関係を説明する。

##### ① 横構取り付け位置に関するパラメータ $e_b/r_x$

横構の取り付け位置が主桁のせん断中心から下方に離れるほど，橋断面のせん断中心が下方に移動す

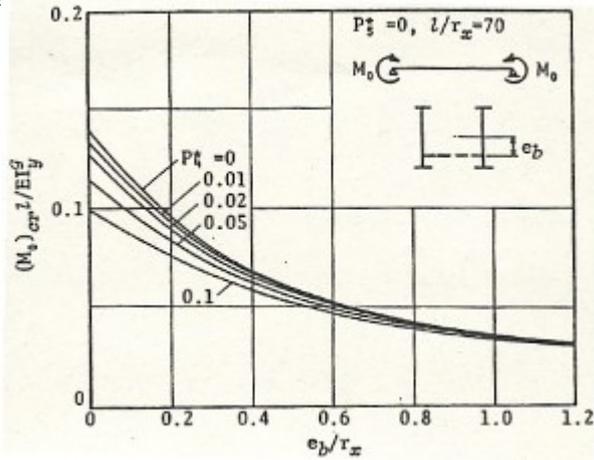


図3-30 パラメータ  $e_b/r_x$  と  $P_4^*$  の影響 (等曲げ, 境界条件 S-S)

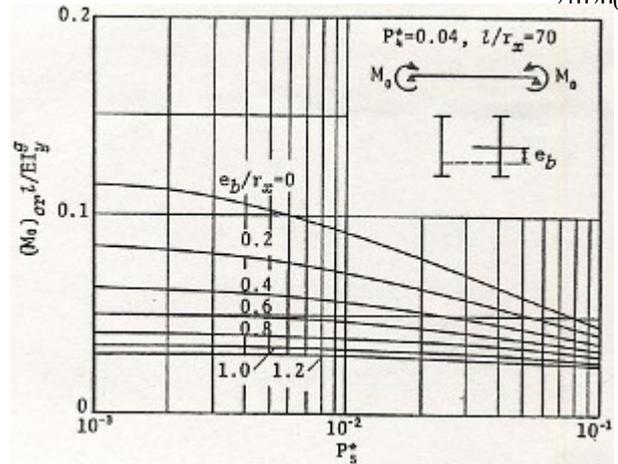
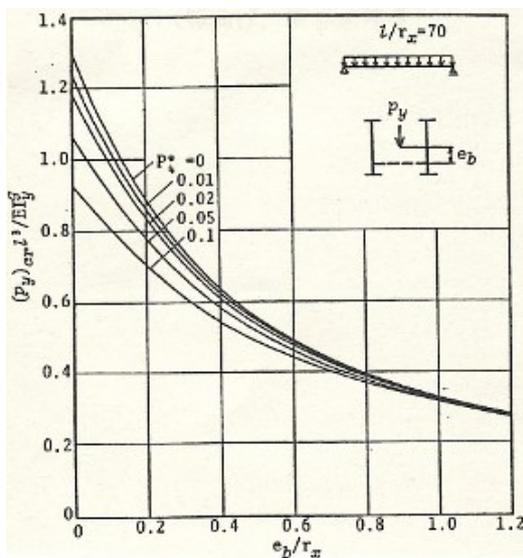
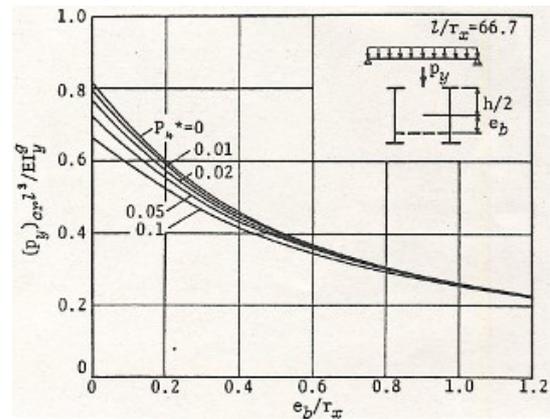


図3-31 パラメータ  $e_b/r_x$  と  $P_5^*$  の影響 (等曲げ, 境界条件 S-S)



(a)  $l/r_x=70$



(b)  $l/r_x=66.7$

図3-32 パラメータ  $e_b/r_x$  と  $P_4^*$  の影響 (等分布荷重, 境界条件 S-S)

るので, 座屈荷重は著しく低下する.  $e_b/r_x=0$  の場合の座屈荷重に比べて, 実橋におけるこのパラメータの平均値である  $e_b/r_x=0.8$  の座屈荷重は 30%以下に減少する. (図3-30, 図3-31)

② 横構のせん断剛性に関するパラメータ  $P_4^*$

実橋におけるパラメータ  $P_4^*$  の分布範囲で  $10^{-2} < P_4^* < 0.1$  を考慮すると, 最大で 30% の強度低下として現れる. (図3-30) この影響は横構取り付け位置に関するパラメータ  $e_b/r_x$  が小さいほど顕著である.

③ 横構取り付け部の局所変形に関するパラメータ  $P_5^*$

このパラメータの座屈荷重に対する影響は横構のせん断変形と同様であるが, 実橋におけるパラメータの分布範囲では 2~3% の強度低下を引き起こすに留まっている. (図3-31)

④ 分布荷重の作用位置に関するパラメータ  $e_b/r_x$

図3-32および図3-33に示すように, 分布荷重の作用位置も座屈荷重に対して重大な影響を与える. これらの図では分布荷重が主桁の図心の高さに作用する場合と主桁上フランジの高さに作用する場合を示したが, 実橋における床版コンクリート打設時の横ねじれ座屈荷重を照査する場合の鋼重と床版重量の重心位置は, これらのケースの中間にある.

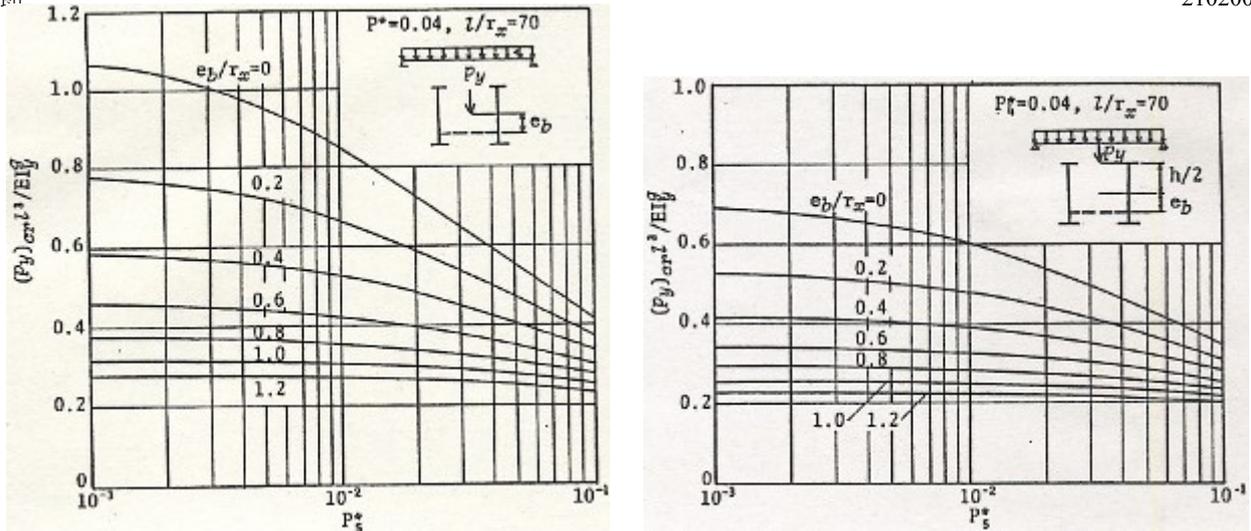


図 3-33 パラメータ  $e_b/r_x$  と  $P_5^*$  の影響 (等分布荷重, 境界条件 S-S)

(4) 弾性座屈強度と極限強度

側道 2 主桁橋の架設系の安全性に照査は弾性範囲内の検討で充分である. なぜなら床版コンクリートの打設時における主桁の応力は死荷重レベルであり, 許容応力度に比べても余裕がある. しかし, 弾性座屈強度では極限強度に対する真の安全率を評価することができないので, 初期不整を考慮した弾塑性有限変位解析によって平面形状のスレンダーな 2 主桁構造の耐荷力特性を明らかにすることは研究レベルでは必要である. その際, 弾性座屈解析の結果は構造の座屈パラメータを評価するために使用する. 横桁連結形式および横構連結形式側道橋の耐荷力曲線や補剛設計の考え方は参考文献 3) を参考にされたい.

3. 4の参考文献

- 1) 小松定夫・西村宣男・大野正人: 横桁で連結された 2 主桁橋の全体横倒れ座屈戸区政と補剛設計法, 土木学会論文集, No.329, 1983.
- 2) 小松定夫・西村宣男・中田憲正: 横構・対傾構で連結された 2 主桁橋の全体横倒れ座屈荷重の簡易計算式, 土木学会論文報告集, No.341, 1984.
- 3) 小松定夫・西村宣男・中田憲正: 側道 2 主桁橋架設系の全体横倒れ極限強度式と補剛設計法, 構造工学論文集, No.30, 1984.
- 4) 堀田毅・内藤純也・西村宣男: 鋼 2 主桁橋架設系の横ねじれ座屈特性, 土木学会論文集, No.612/I-46, 1999.

### 3. 5 鋼逆 $\pi$ 形断面合成桁

#### (1) はじめに

1990 年代の後半から逆  $\pi$  形の鋼桁とコンクリート床版を合成し、ねじり剛性の高い箱断面を構成した桁橋の採用例が増加した。この形式の合成桁橋は、1960 年代にも経済的な橋梁形式として採用されたが、架設時の落橋事故があったことや、何よりも疲労損傷した床版の補修が困難であるとの理由で、合成桁橋が忌避される状況から 30 年近く注目されない状態が続いていた。1990 年代になり社会資本投資の節減が求められるようになるにつれ、合理化橋梁に対する要求も高まり、その一つの回答として復活したのが鋼逆  $\pi$  形断面合成桁（通称開断面箱桁と呼ばれている）である。

鋼逆  $\pi$  形断面合成桁の課題は、床版コンクリート打設時において逆  $\pi$  形断面の鋼桁のみのねじれ剛性が小さいため、非常駐車帯が設けられて死荷重が偏心载荷となる場合や、主桁が平面曲率を有していて、死荷重レベルでねじり荷重を受ける場合に形状管理が困難になることである。このねじり剛性不足を補うために、鋼桁の上に設置される合成床版の底鋼板を主桁フランジと連結することにより、**図 3-34** に示す準閉断面を構成する構造法が開発された。合成床版は橋軸方向に幅 2m のタイプが主流であるが、主桁フランジ上に並べられた合成桁の底鋼板同士を普通ボルトで連結する場合や、底鋼板と主桁フランジの連結にスタッドボルトや専用金具を使用する場合など、底鋼板が本来有している面内剛性を有効には活用できていない例が多い。構造的に言えば、鋼逆  $\pi$  形断面合成桁架設時構造系は、逆  $\pi$  形断面の開断面構造の特性に合成床版底鋼板の部分的寄与による閉断面構造の特性が加味された開断面と閉断面の中間構造であると言える。本節ではこのような開断面と閉断面の中間的特性を持つ構造の拡張骨組理論による取扱法 <sup>1)</sup> を述べる。

なお、鋼逆  $\pi$  形断面合成桁の課題としては、本節で述べる問題以外に、

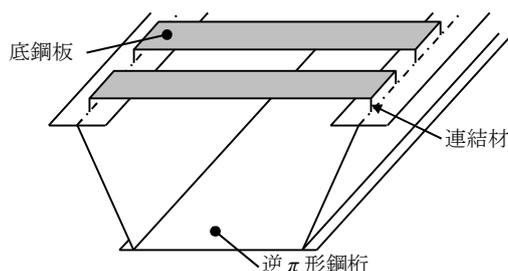
- ・ 架設系の終局強度設計法 <sup>2),3)</sup>
- ・ 送り出し架設時のウェブクリッピングの評価
- ・ 曲線桁における補剛法 <sup>4)</sup>
- ・ 負曲げを受ける中間支点近傍の強度評価と補剛設計の合理化

などがあるが、それぞれの詳細は参考文献を参照されたい。

#### (2) ねじりに関する弾性方程式の誘導とその解

##### 1) 底鋼板と連結材のせん断剛性評価

鋼逆  $\pi$  形断面桁の上フランジ上に設置される合成床版の底鋼板は床版の型枠を兼ねており、板厚は比較的薄いため、コンクリートが硬化して合成効果を発揮する前の底鋼板単独の面内力に対する座屈強度



**図 3-34** 鋼逆  $\pi$  形断面合成桁橋

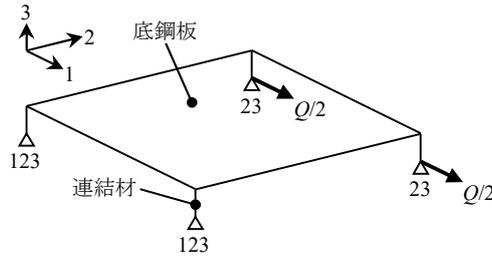


図 3-35 合成床版底鋼板の面内せん断剛性の評価モデル

表 3-5 各種合成床版の底鋼板の換算板厚と等価斜材断面積

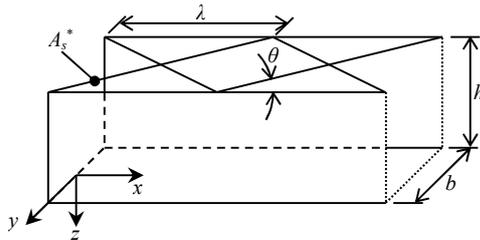


図 3-36 溝形断面を補剛した準閉断面部材

合成床版の種類	連結材	$A_s^*/\text{mm}^2$	$t^*/\text{mm}$
簡易モデル	スタッドボルト	116	0.032
	$\pi$ 形金具	1086	0.302
帯形ジベル合成床版	スタッドボルト	110	0.031
	$\pi$ 形金具	1340	0.372
成形鋼合成床版	スタッドボルト	100	0.028
	$\pi$ 形金具	1550	0.430
Uリブ型ジベル合成床版	スタッドボルト	110	0.031
	$\pi$ 形金具	1400	0.389
ロビンソン型ジベル合成床版	スタッドボルト	90	0.025
	$\pi$ 形金具	1730	0.480

は高くない。床版コンクリートの打設時に桁作用により過大な圧縮力が底鋼板に導入されることを回避する構造法が採用される。一つは底鋼板同士の連結を普通ボルトで連結することにより、底鋼板の橋軸方向圧縮応力が連続することを避けること、今一つは底鋼板と主桁上フランジの連結材の剛性を柔なものとし、主桁作用による合成効果を適切に制御する構造法である。このような構造を考慮して鋼逆  $\pi$  形断面桁の架設時における底鋼板の拘束効果は図 3-35 に示すような底鋼板と連結材からなる部分構造の有限要素解析によって評価する。

表 3-5 は、各種の合成床版を対象とした解析結果について、底鋼板の面内せん断に対する剛性を換算板厚  $t^*$  と等価斜材断面積  $A_s^*$  で表現したものである。合成床版のタイプによる底鋼板せん断剛性は大きく異なることはない。

なお、図 3-36 に示すように、有限要素解析による変形量  $\delta$  から換算板厚や等価斜材断面積を計算するには次式を用いる。

$$t^* = \frac{Qb}{G\lambda\delta} \tag{1}$$

$$A_s^* = \frac{QL_d^3}{2E\lambda^2\delta} \tag{2}$$

2) 断面定数

図 3-36 に示す溝形断面が、換算板厚  $t^*$  のフランジで補剛された 1 室矩形断面を考える。そりねじり定数  $C_w$ 、純ねじり定数  $J_c$  およびせん断中心位置  $e_y$  は

$$\begin{aligned} C_w &= \frac{ht_w}{3} \{U_{s,0}^2(2 + \beta_0) + 2U_{s,0}U_{s,1} + U_{s,1}^2(2 + \beta_1)\} \\ J_c &= \frac{(2F)^2}{\chi} \\ e_y &= -\frac{2U_{s,0}}{b} + \frac{q}{t^*} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{ここに, } U_{s,0} = -\frac{\Delta U_s(\beta_1 + 3)}{\beta_0 + \beta_1 + 6}$$

$$U_{s,1} = -\frac{\Delta U_s(\beta_0 + 3)}{\beta_0 + \beta_1 + 6}$$

$$\Delta U_s = -\frac{bh}{2} + \frac{qh}{t_w}$$

$$q = \frac{2bh}{\chi}, \quad F = bh$$

式中の無次元量は

$$\beta_0 = \frac{bt_w^*}{ht_w}, \quad \beta_1 = \frac{bt_{fl}}{ht_w}, \quad \chi = \frac{b}{t_w^*} + \frac{b}{t_{fl}} + \frac{2h}{t_w} \quad (4)$$

また純ねじり定数は

$$J_c = \frac{1}{3}(bt_{fl}^3 + 2ht_w^3 + bt_w^3) \quad (5)$$

### 3) 弾性方程式と解

上記の断面定数を用いたねじり角  $\varphi$  に関する弾性方程式は

$$EC_w\varphi^{(4)} - (GJ_0 + GJ_c)\varphi'' = m_t \quad (6)$$

ここに， $m_t$  は分布ねじり荷重を表す。

鋼逆  $\pi$  形断面合成桁橋の架設系（床版コンクリート硬化前）で桁のねじりが問題となるのは①直線の多径間連続桁橋で非常駐車帯が設置される径間で死荷重の偏載によりねじりが作用する場合，②桁橋が平面曲率を有し，死荷重によってねじりが作用する場合が挙げられる．ここでは①の問題を対象に拡張骨組理論と有限要素法による解析について論じよう。

この問題では，偏載死荷重によるねじり変形が完成系路面の平面度に与える影響ができるだけ小さくなるように，以下のような施工順序を考える．床版コンクリートの打設は偏載荷重が無い非常駐車帯のない径間を先行して施工し，その区間のコンクリートが硬化した後に非常駐車帯を設置する径間の床版コンクリートを打設する．（図 3-37）このような施工順序を考慮すると，微分方程式(6)を解く際のねじりに関する境界条件としては

$$X=0 \text{ および } x=L : \varphi=0, \quad \varphi'=0$$

即ち，着目径間の両端において，ねじれ角および断面のそりが拘束されていると考える．分布ねじり荷重が着目径間において満載状態（非常駐車帯の長さが径間長に等しい）とすると式(6)の解は

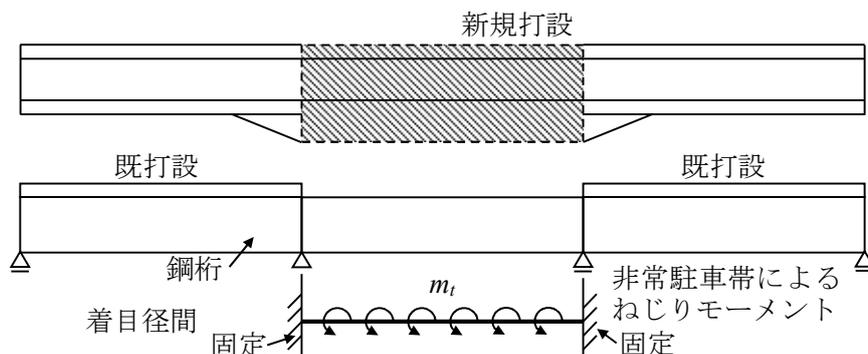


図 3-37 鋼逆  $\pi$  形断面合成桁の非常駐車帯を含む床版打設時モデル

表3-6 補剛された溝形断面ばり

	BEAM-S	BEAM-C
$J_o$	$t^*$ を考慮 $\frac{1}{3}(bt_{fl}^3 + 2ht_w^3 + bt^{*3})$	$t^*$ の項を考慮 $\frac{1}{3}(bt_{fl}^3 + 2ht_w^3)$
$J_c$	$t^*$ を考慮 $\frac{(2bh)^2}{\frac{b}{t_{fl}} + 2\frac{h}{t_w} + \frac{b}{t^*}}$	$t^*$ を考慮 $\frac{(2bh)^2}{b}t^*$
$C_w$	$t^*$ を考慮 $\frac{ht_w}{3}\{U_{s,0}^2(2+\beta_0) + 2U_{s,0}U_{s,1} + U_{s,1}^2(2+\beta_1)\}$	$t^*$ の項を考慮 $\frac{b^2h^3t_w}{12} \cdot \frac{2bt_{fl} + 3ht_w}{bt_{fl} + 6ht_w}$

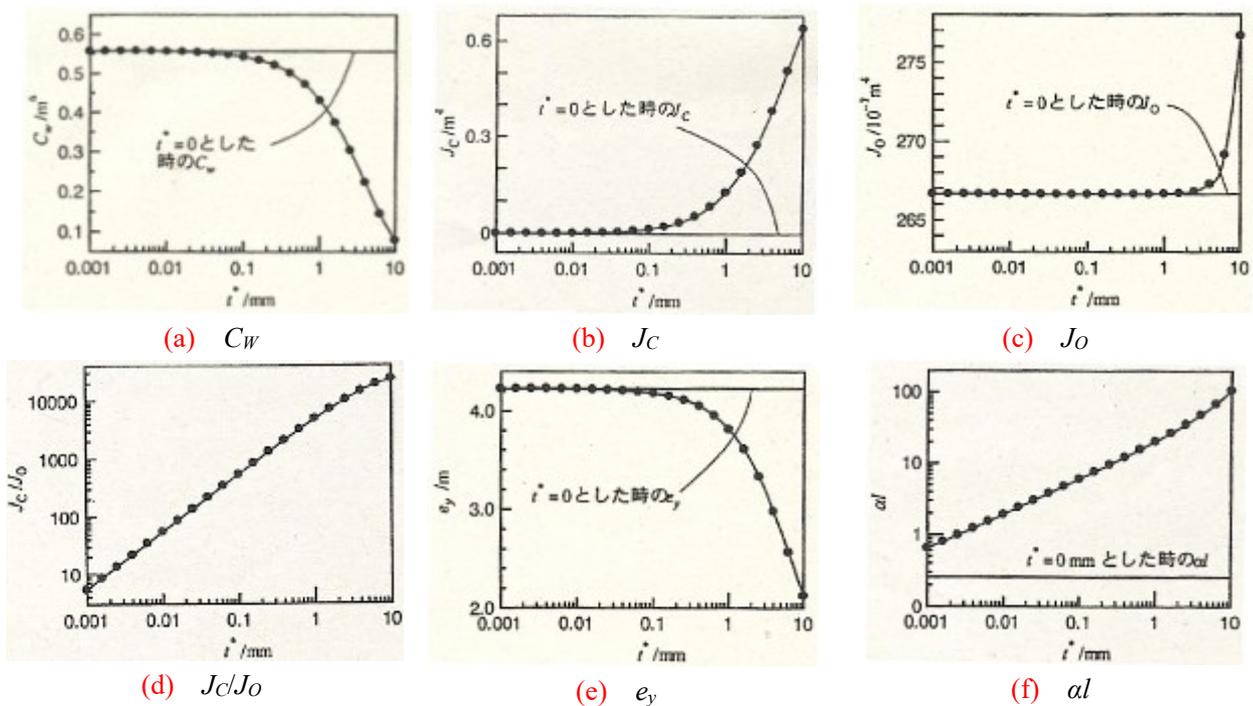


図3-38 断面諸量と換算板厚の関係

$$\varphi = \frac{m_t}{(GJ_o + GJ_c)\alpha^2} \left\{ \frac{\alpha^2 x(L-x)}{2} + \frac{\alpha L}{2} \frac{\sinh \alpha x + \sinh \alpha(L-x) - \sinh \alpha L}{\cosh \alpha L - 1} \right\} \quad (7)$$

ここに,  $\alpha = \sqrt{\frac{GJ_o + GJ_c}{EC_w}}$

(3) 補剛された準閉断面の断面定数と補剛効果

1) 補剛された溝形断面の断面定数

最初は簡単のために, 表3-6の諸元を有する底鋼板で補剛された両端固定の溝形断面ばりを考える. 式(3)~(5)で表されたねじりに関する断面諸量と底鋼板の換算板厚の関係を図3-38に示す. 対象としている断面では換算板厚  $t^*$ が 0.01mm 程度から閉断面としてのねじり剛性が漸増し, そりねじり定数比も開断面の特性 (Vlasov torsion) から閉断面の特性 (Saint Venant torsion) を代表する値に変化していく.

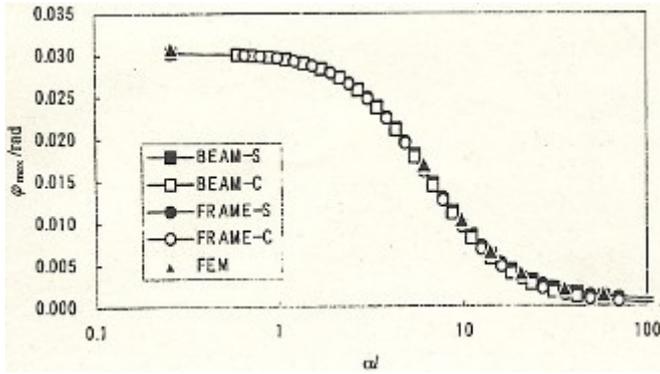


図3-39 径間中央のねじれ角とねじり定数比

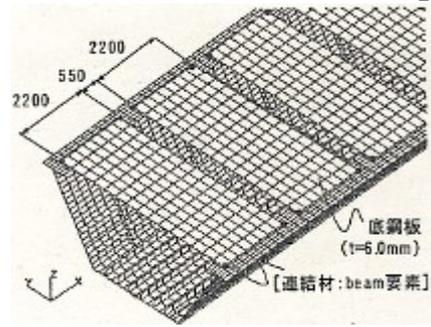
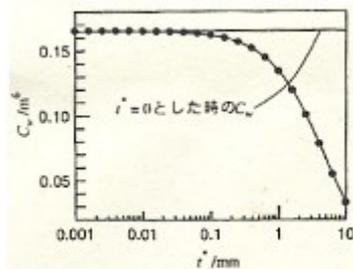
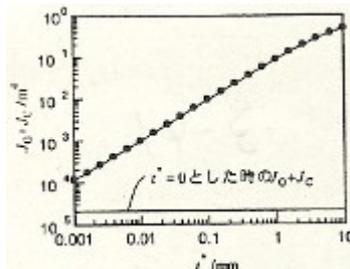


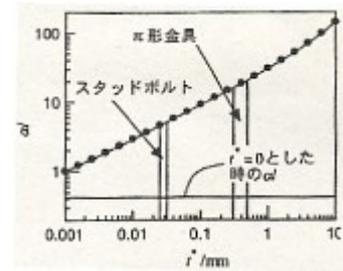
図3-40 底鋼板を断続接合された鋼逆π形断面桁



(a)  $C_w$



(b)  $J_0 + J_w$



(c)  $\alpha l$

図3-41 断面諸量と底鋼板換算板厚

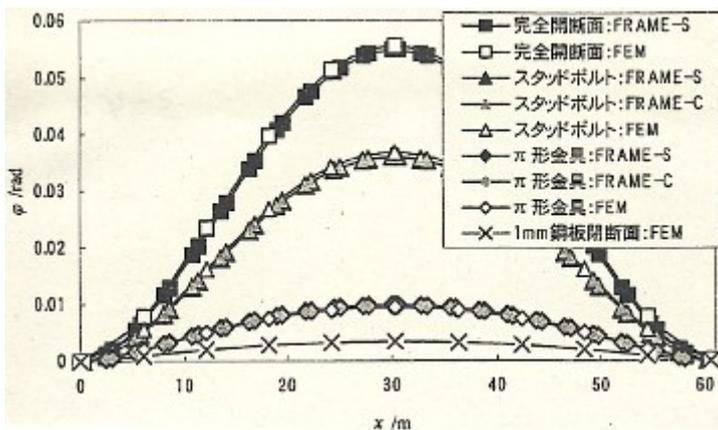


図3-42 ねじれ角の橋軸方向分布

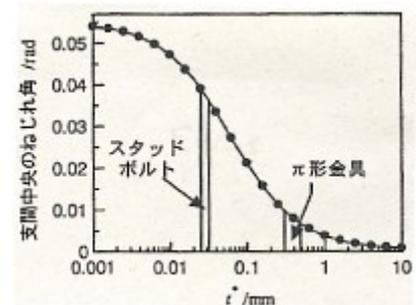


図3-43 径間中央のねじれ角と換算板厚

はりの径間中央におけるねじり角とねじり定数比の関係は図3-39に示す通りであり, 拡張骨組理論, マトリクス変位法および有限要素法の結果が一致している. なおこれらの特性は Vlasov の理論<sup>5)</sup>に一致している.

## 2) 補剛された逆π形断面の断面定数と補剛効果

次に, 図3-40に示す鋼逆π形断面桁の上フランジに底鋼板が断続的に設置された場合について考える. 底鋼板により補剛された区間の断面諸量と底鋼板の換算板厚の関係は, 図3-41に示すように補剛された溝形断面の場合と同様である.

図3-42にねじれ角の橋軸方向分布を示す. 図中には①底鋼板がない開断面ばり, ②底鋼板がスタッドボルトにより柔らかく桁の上フランジに連結された場合, ③底鋼板がπ形金具により桁上フランジとやや剛に連結された場合および④板厚1mmの鋼板が連続的に結合された場合を示している. ①および②の場合は両側支点近傍でねじり角分布形状に開断面桁のそり拘束の影響が認められるが, ③および④の場合は閉断面桁の特徴が現れ, ねじれ角分布は2次放物線に近くなっている. 図3-43には径間

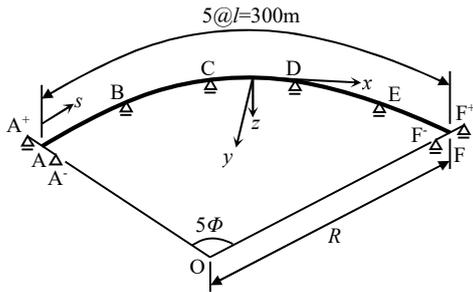


図 3-44 5 径間連続曲線桁解析モデル

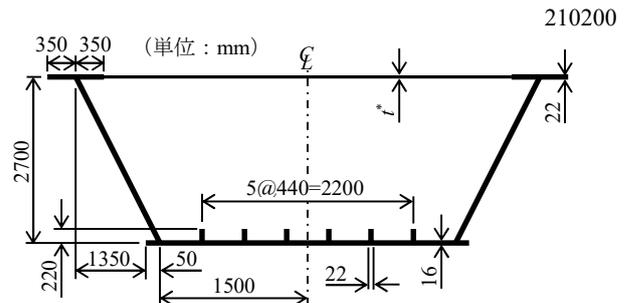


図 3-45 解析モデルの断面構成

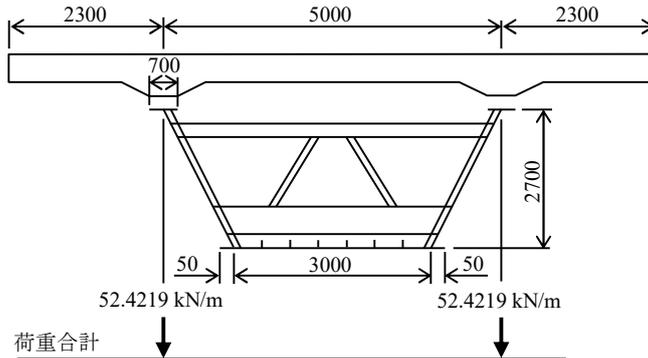


図 3-46 死荷重載荷状態

中央のねじれ角と底鋼板の換算板厚の関係を表している。

#### (4) 曲線鋼逆π形断面桁の底鋼板による補剛効果

##### 1) 着目項目と解析法

先に挙げた鋼逆π形断面桁橋のねじりに関する今一つの課題として、曲線桁架設の死荷重による変形と応力の問題がある。ねじり変形に関しては路面の横断勾配に関する精度管理値の関係、応力に関してはねじりによるそり応力と曲げ応力の比率である。死荷重によるねじり変形を考慮して部材の無応力状態の形状寸法を算定する際や、開断面に特有のそり応力を断面決定で省略できる量に制限できれば、設計作業が簡素化される。

構造解析は本章の(2)に示した剛性を用いた3次元骨組構造を対象としたマトリックス変位法で、節点の変位自由度は断面のそりを含む7自由度である。

##### 2) 構造モデル

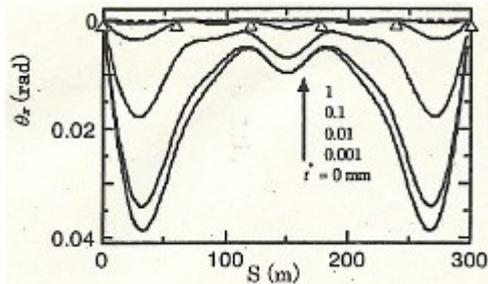
検討対象構造は図3-44に示す5径間連続桁橋で、端支点は2支承、中間支点は水平力分散ゴム支承を念頭に1支承とし鉛直変位のみ拘束する。桁の平面形状は曲率半径Rの円弧とし、Rを100mから無限大まで変化させた。構造モデルの断面構成と死荷重載荷状態を図3-45および図3-46に示す。

##### 3) ねじれ角とそりモーメント分布

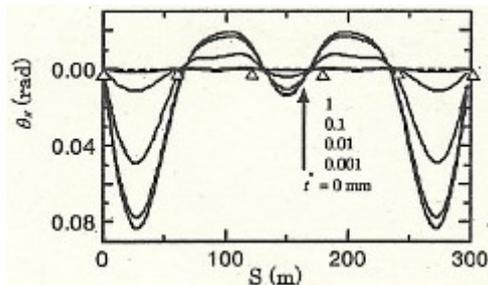
ねじれ角分布を図3-47, そりモーメント分布を図3-48およびねじりモーメント分布(St.Venantねじりで全ねじりモーメントではない)を図3-49に示す。何れも曲率半径が小さくなると、曲線桁の影響が強く現れる。また、底鋼板の換算板厚が大きくなるにつれ、変形や断面力特性は開断面桁から閉断面桁へと移行して行く状態が現れている。

検討課題としている①フランジのそり応力を無視できる構造パラメータの範囲、および②形状管理のためのねじり角制限について述べる。

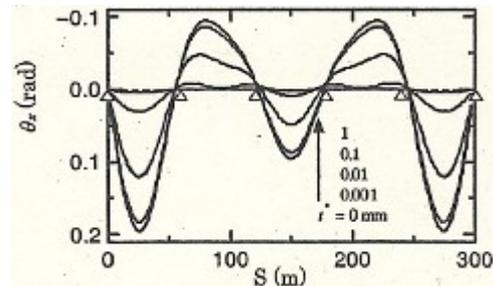
表3-7はフランジの曲げ応力に対するそり応力の割合を曲率半径と底鋼板の換算板厚をパラメー



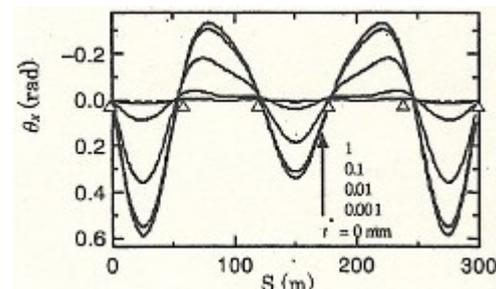
(a) R=3000m



(b) R=900m

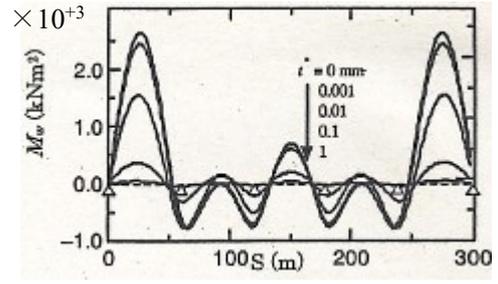


(c) R=300m

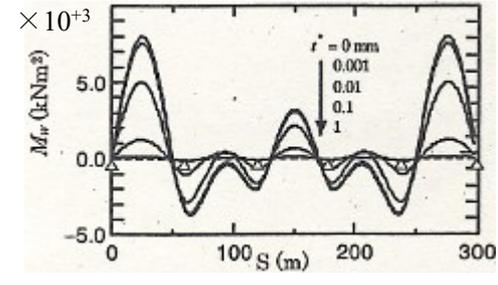


(d) R=100m

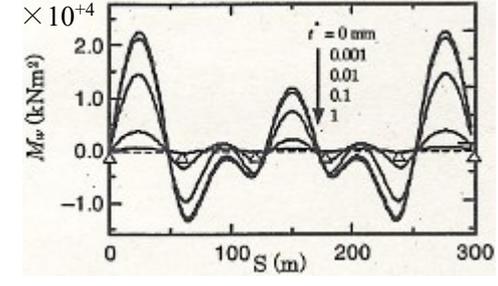
図 3-47 ねじり角分布



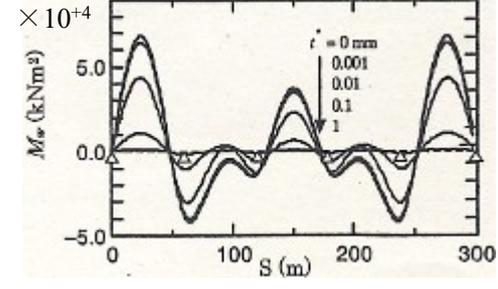
(a) R=3000m



(b) R=900m



(c) R=300m



(d) R=100m

図 3-48 そりモーメント分布

タとして纏めたもので, 仮に 10%をそり応力を無視できる範囲とするとハッチング部分が制限を越えている。

図 3-50 および図 3-51 は, 中央径間および端径間におけるそりモーメント最大位置におけるそり応力・曲げ応力比  $\gamma$  とねじれ角最大値を中心角  $\phi$  と底鋼板の換算板厚をパラメータとして表している。床版コンクリート打設に伴うねじれ角を制限して, 完成形状を計画通りに施行する際の参考資料として活用できる。

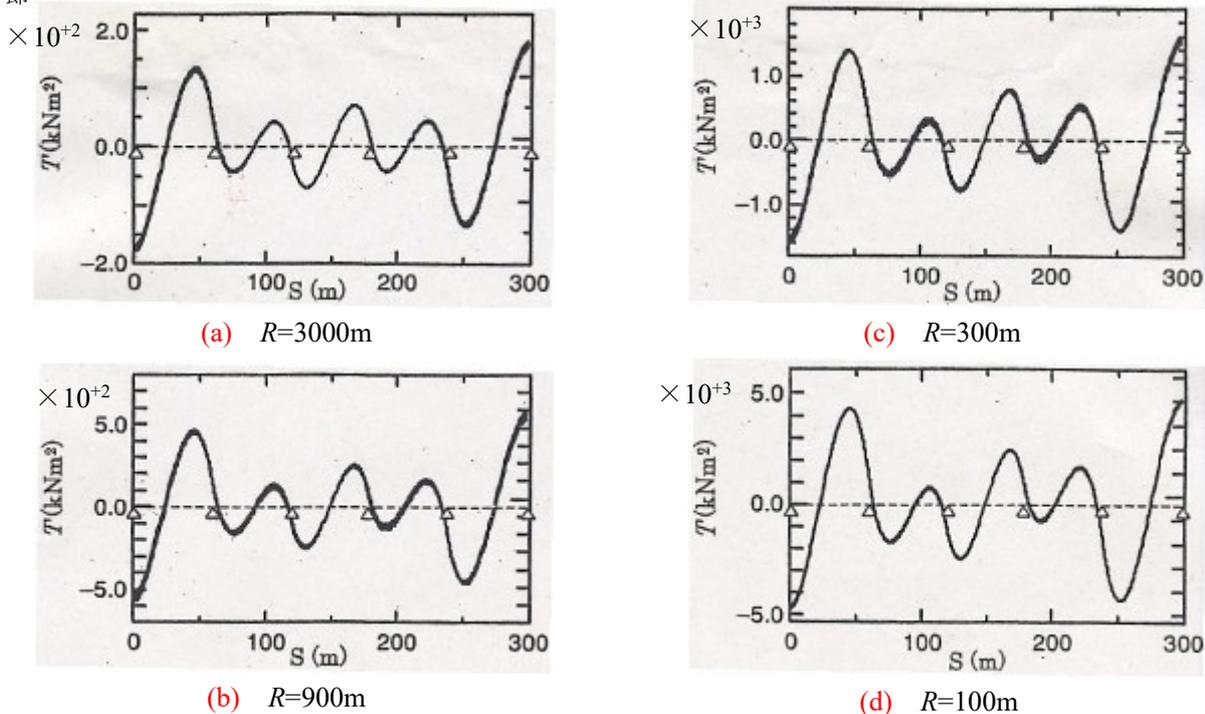


図 3-49 ねじりモーメントの分布

表 3-7 中央径間における応力比

$R$ (m)	$\infty$	3000	1200	900	600	300	200	100
$\varphi$	0.000	0.020	0.050	0.067	0.100	0.200	0.300	0.600
$t^*$ (mm)	$\sigma_w/\sigma_b$ (%)							
0.000	0.00	7.60	23.37	33.97	55.90	120.74	184.42	376.14
0.001	0.00	7.81	22.51	32.25	52.56	113.21	172.92	352.62
0.010	0.00	6.67	19.68	23.11	35.97	57.80	115.61	235.27
0.020	0.00	5.40	13.57	18.23	27.86	57.79	87.95	178.60
0.050	0.00	3.48	8.71	11.63	17.52	35.56	53.84	108.87
0.100	0.00	2.21	5.53	7.37	11.07	22.25	33.54	67.58
0.200	0.00	1.29	3.22	4.29	6.43	12.89	19.37	38.89
0.500	0.00	0.59	1.47	1.96	2.94	5.88	8.82	17.66
1.000	0.00	0.33	0.82	1.09	1.64	3.28	4.91	9.83

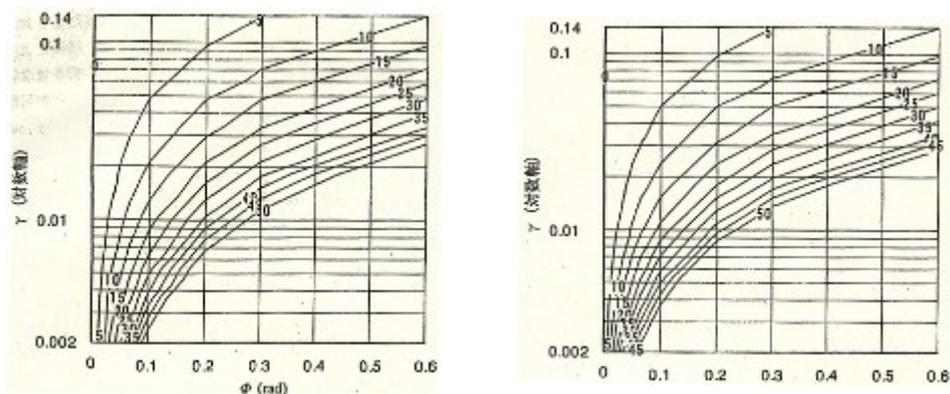


図 3-50 応力比  $\sigma_w/\sigma_b$  (%)

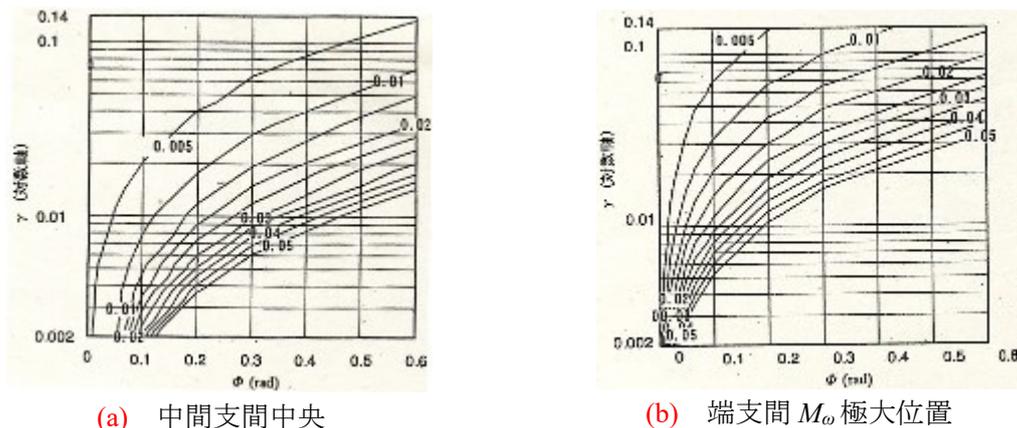


図3-51 ねじり角の極大値 (rad)

### 3. 5の参考文献

- 1) 日下敦・玉田和也・加藤久人・西村宣男：鋼逆 $\pi$ 形合成箱桁橋架設系の合成床版底鋼板による補剛効果，鋼構造論文集，Vol.12，No.48，2005.
- 2) 玉田和也・小野潔・川村暁人・西村宣男：鋼逆 $\pi$ 形箱桁橋の架設系曲げ耐荷性能に関する実験的研究，土木学会論文集，No.787/I-71，2005.
- 3) 玉田和也・小野潔・川村暁人・西村宣男：鋼逆 $\pi$ 形箱桁橋架設系のせん断耐荷性能に関する実験的研究，土木学会論文集，No.808/I-74，2006.
- 4) 玉田和也・日下敦・西村宣男：合成床版底鋼板の架設時補剛効果について，床版シンポジウム論文集，2006.
- 5) Vlasov,V.Z.：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，（奥村敏恵ほか訳），1967.

### 3. 6 波形鋼板ウェブ PC 桁橋梁

#### (1) はじめに

山間部の峡谷橋や浅海部の横断橋として，多くの張り出し式プレストレストコンクリート箱桁橋（デュビダーク工法）が建設されてきた．この形式の橋梁に対して一層合理化を推進する技術革新の一つとして箱断面のコンクリートのウェブを鋼製ウェブに置き換え，重量軽減を図る技術が導入された．鋼製ウェブはコンクリート床版にプレストレスを効率的に導入するため，面内剛性が大きい平鋼板ではなく波形鋼板を用いることから，この形式の橋梁は波形鋼板ウェブ PC 箱桁橋と称されている．

この形式の構造は，上下コンクリート床版をフェーシングおよび波形鋼板ウェブをコアとする積層ばりで見なすことができる．波形ウェブはアコーディオンの様に軸方向の剛性は小さいので，2. 5 で述べた 3 層積層ばりの特殊なケースと考えることができる．2. 5 では各層の曲げに伴うせん断変形を考慮した基礎微分方程式を示したが，ここでは比較的薄いコンクリート床版のせん断変形を無視することにより微分方程式が簡素化され，閉じた解を見出せる形にできた<sup>1)</sup>．対象構造を一般化するために微分方程式の解を用いて誘導したマトリックス変位法<sup>2)</sup>についても紹介する．なお床版のせん断変形を無視することによる誤差は同様の構造を対象として誘導された白谷らの解<sup>3)</sup>（張り出し施工に限定されているが床版のせん断変形を考慮した理論）との比較によって，ほとんど差がないことが確認されている．

#### (2) 基礎方程式とその解

##### 1) 構造モデルと変位場

図 3-5 2 に示すように，波形鋼板のウェブの上下両側に RC 床版が合成され，床版には軸力，せん断力および曲げモーメントが作用し，ウェブにはせん断力のみが作用するモデルを考える．波形鋼板は軸方向剛性が小さいので，軸力と曲げモーメントを分担しないと考えている．すると断面全体のせん断力  $Q_g$  および曲げモーメント  $M_g$  は次式で与えられる．

$$Q_g = Q_1 + Q_2 + Q_w \tag{1}$$

$$M_g = (M_1 + M_2) - N_1 \eta_1 + N_2 \eta_2 = M_f + M_n \tag{2}$$

ここに， $\eta_1$  および  $\eta_2$  は，上下 RC 床版のみを考慮した断面の図心からそれぞれの床版の図心までの距離を表し，床版の断面積に対して以下の関係が成立する．

考慮する変位は鉛直変位  $v$ ，たわみ角  $dv/dx$  およびウェブの水平軸回り回転角  $\theta$  である．ウェブのせん断ひずみ  $\gamma$  はたわみ角  $dv/dx$  と回転角  $\theta$  の差で表される．

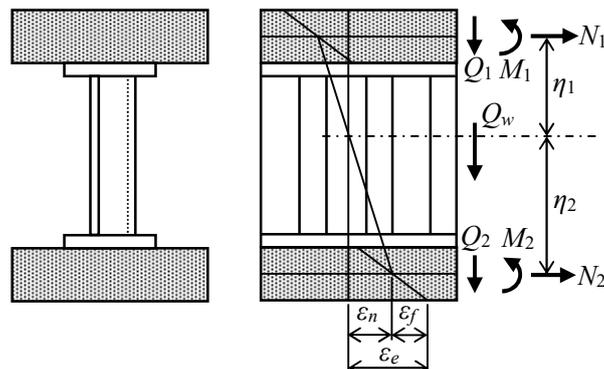
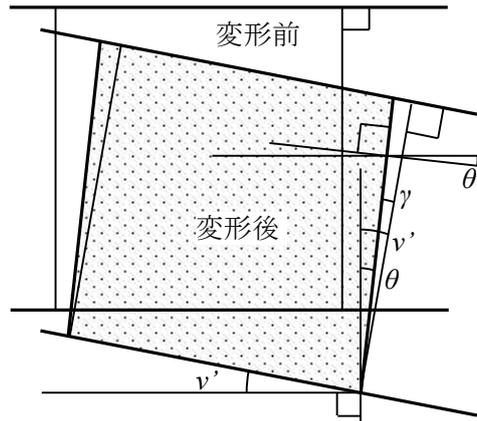
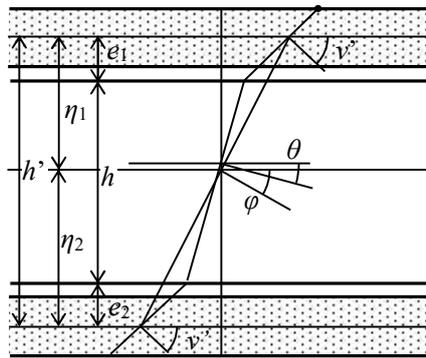


図 3-5 2 波形鋼板ウェブ PC 桁の内力とひずみ分布



(a) ウェブ内変位場



(b) 桁全体変位場

図3-53 鉛直面内変位における波形鋼板ウェブ PC 桁の変位場

$$\gamma = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (3)$$

図3-53の桁全体の変位場において, 上下コンクリート床版のそれぞれの図心を結ぶ直線の回転角  $\varphi$  とウェブの回転角  $\theta$  の間には

$$h'\varphi = (e_1 + e_2) \frac{dv}{dx} + h\theta \quad (4)$$

の関係がある. 式(3)を式(4)に代入すると

$$\varphi = \frac{e_1 + e_2}{h'} \frac{dv}{dx} + \left( \frac{dv}{dx} - \gamma \right) \frac{h}{h'} = \frac{dv}{dx} - \gamma \frac{h}{h'} \quad (5)$$

また, 床版の軸方向変位は以下のように表される.

$$u_1 = \eta_1 \varphi, \quad u_2 = \eta_2 \varphi \quad (6)$$

## 2) 断面力の変位表示

上下コンクリート床版に作用する断面力と変位の関係は

$$\begin{aligned} N_1 &= EA_1 \frac{d\varphi}{dx}, & M_1 &= -EI_1 \frac{d^2v}{dx^2}, & Q_1 &= -EI_1 \frac{d^3v}{dx^3} \\ N_2 &= EA_2 \frac{d\varphi}{dx}, & M_2 &= -EI_2 \frac{d^2v}{dx^2}, & Q_2 &= -EI_2 \frac{d^3v}{dx^3} \end{aligned} \quad (7)$$

ここに,  $EA_i$ ,  $EI_i$  ( $i=1, 2$ ) はコンクリート床版の鋼換算伸びおよび曲げ剛性である.

ウェブのせん断力は, せん断剛性を  $GA_w$  として

$$Q_w = GA_w \gamma \quad (8)$$

これらの各要素の断面力を合成して, 断面全体の断面力を変位表示する

$$Q_g = Q_1 + Q_2 + Q_w = -EI_f \frac{d^3 v}{dx^3} + GA_w \gamma \quad (9)$$

$$\begin{aligned} M_g &= M_1 + M_2 - (N_1 \eta_1 - N_2 \eta_2) \\ &= -EI_f \frac{d^2 v}{dx^2} - E(A_1 \eta_1^2 + A_2 \eta_2^2) \frac{d\varphi}{dx} \\ &= -EI_f \frac{d^2 v}{dx^2} - EI_n \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned} \quad (10)$$

ここに,  $I_f = I_1 + I_2$ ,  $I_n = A_1 \eta_1^2 + A_2 \eta_2^2$ ,  $I_g = I_f + I_n$

### 3) 弾性方程式

式(9)を変形すると

$$\gamma = \frac{EI_f}{GA_w} \frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{Q_g}{GA_w} \quad (11)$$

この関係を式(5)に代入し

$$\varphi = \frac{dv}{dx} - \frac{h}{h'} \frac{EI_f}{GA_w} \frac{d^4 v}{dx^4} - \frac{h}{h'} \frac{Q_g}{GA_w} \quad (12)$$

さらに両辺を1階微分し,  $dQ_g/dx = -q$  なる関係を用いると,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{h}{h'} \frac{EI_f}{GA_w} \frac{d^5 v}{dx^5} + \frac{h}{h'} \frac{q}{GA_w} \quad (13)$$

一方, 断面全体の断面力と外力の釣り合いより

$$\frac{d^2 M_g}{dx^2} = -q \quad (14)$$

合成断面の曲げモーメントをたわみ  $v$  の関数で表すと

$$M_g = -EI_g \frac{d^2 v}{dx^2} + EI_n \frac{h}{h'} \frac{EI_f}{GA_w} \frac{d^4 v}{dx^4} - EI_n \frac{h}{h'} \frac{q}{GA_w} \quad (15)$$

同様に, せん断力をたわみの関数で表すと

$$Q_g = -EI_g \frac{d^3 v}{dx^3} + EI_n \frac{h}{h'} \frac{EI_f}{GA_w} \frac{d^5 v}{dx^5} - EI_n \frac{h}{h'} \frac{1}{GA_w} \frac{dq}{dx} \quad (16)$$

式(15)の両辺を2階微分して式(14)に代入すると, 鉛直たわみに関する弾性方程式が与えられる.

$$\frac{d^6 v}{dx^6} - \alpha^2 \frac{d^4 v}{dx^4} = -\frac{h'}{h} \frac{GA_w}{EI_n EI_f} q + \frac{1}{EI_f} \frac{d^2 q}{dx^2} \quad (17)$$

ここに,  $\alpha^2 = I_g h' GA_w / I_n h EI_f$ .

この力学モデルは, 変位自由度としてたわみと2種類の回転角を含んでいるので, 弾性方程式は6階の微分方程式で表された訳である.

### 4) 弾性方程式の解

微分方程式(17)の解は

$$v = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 \cosh(\alpha x) + C_6 \sinh(\alpha x) + C_0 x^4 \quad (18)$$

ここに,  $C_0 x^4$  は等分布荷重に対する特解,  $C_1 \sim C_6$  は境界条件から決定される定数である.

単純ばりに代表的な荷重が作用する場合の閉じた解を示そう. 通常のはり理論とは異なるので, 各ケースの境界条件ないしは対称条件を示しておく.

### 集中荷重スパン中央載荷

この荷重ケースでは, 波形鋼板ウェブ PC 桁の特徴が最も強く表れる. 対称性からスパンの左半分に着目する.

左支点における境界条件は

$$x=0 : v=0, M_f=0, M_n=0$$

スパン中央における対称条件は

$$x=L/2 : Q_g=P/2, dv/dx=0, \theta=0$$

右支点集中モーメント

この荷重状態では, 支点上モーメント  $M_R$  の床版曲げ  $M_f$  と床版軸力によるモーメント  $M_n$  の分担率を与える必要がある.

左支点における境界条件は

$$x=0 : v=0, M_f=0, M_n=0$$

右支点における境界条件は

$$x=L : v=0, M_f=(1-\rho)M_R, M_n=\rho M_R$$

ここに,  $\rho$  : 全曲げモーメントに占める床版軸力による曲げモーメントの分担率.

等分布荷重満載

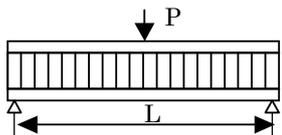
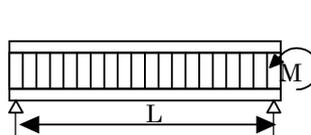
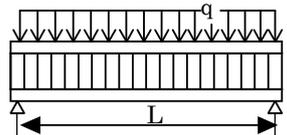
左支点における境界条件は

$$x=0 : v=0, M_f=0, M_n=0$$

右支点における境界条件は

$$x=L : v=0, M_f=0, M_n=0$$

表 3-8 代表的荷重状態に関する式(18)の積分定数

	中央集中荷重	支点集中モーメント	分布荷重
			
$C_0$	0	0	$\frac{q}{24EI_g}$
$C_1$	0	0	$-\frac{q}{\alpha^4} \frac{I_n}{EI_g I_f}$
$C_2$	$\frac{P}{2EI_g} \left( \frac{L^2}{8} + \frac{I_n}{I_f \alpha^2} \right)$	$\frac{ML}{EI_g} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{(\alpha L)^2} \frac{I_f - \rho I_g}{I_f} \right)$	$\frac{qL}{2\alpha^2} \frac{I_n}{EI_g I_f} + \frac{qL^3}{24EI_g}$
$C_3$	0	0	$-\frac{q}{2\alpha^2} \frac{I_n}{EI_g I_f}$
$C_4$	$-\frac{P}{12EI_g}$	$-\frac{M}{6LEI_g}$	$-\frac{qL}{12EI_g}$
$C_5$	0	0	$\frac{q}{\alpha^4} \frac{I_n}{EI_g I_f}$
$C_6$	$-\frac{PI_n}{2EI_g I_f \alpha^3 \cosh(\alpha L/2)}$	$\frac{M}{EI_g \alpha^2 \sinh(\alpha L)} \frac{I_f - \rho I_g}{I_f}$	$-\frac{q}{\alpha^4} \frac{I_n}{EI_g I_f} \frac{\sinh(\alpha L/2)}{\cosh(\alpha L/2)}$

$\rho$  は作用モーメント  $M$  のうち床版で負担されるモーメント  $M_f$  の分担率を表し,  $M_f=\rho M$  なる関係を有する

これらの境界条件, 対称条件を適用して求めた各荷重ケースの積分定数を表3-8に掲げる.

4) 力学パラメータと基本構造特性

波形鋼板ウェブ PC 桁の特徴は, ウェブが軸方向応力を分担しないところにある. そのためウェブのせん断応力はウェブの高さ方向に一様分布することになる. ウェブのせん断応力は図3-54に示すように, フランジとウェブの接合辺に沿ったせん断流と釣り合っている.

このせん断流は床版の軸力変化と曲げモーメント変化に対応して与えられる.

このような波形鋼板ウェブの特性から, 作用荷重によるせん断力が直接ウェブに分担されるのではなく, 一旦上下の床版が受け持ち, 主として床版曲げモーメントの変化に起因する上下縁のせん断流によって間接的にウェブのせん断力に移行して行く. 特に集中力が作用する部分にこの現象が顕著に出現する.

図3-55に示すように, 集中荷重を受ける単純ばりの床版曲げモーメントは荷重作用点付近で急増し, この曲げモーメントによる床版内の曲げ応力分布は重ねばりのそれに酷似している. 荷重載荷点から離れるにつれ床版の曲げモーメントは激減し, 通常のはりの曲げ応力分布に近くなる.

また, この現象は曲げに伴うせん断変形と密接に関係している. 図3-56に示すように, スパンが長くなりせん断変形よりも曲げ変形が卓越してくると, 床版曲げモーメントが急増する範囲は荷重載荷点付近に限られるように縮小し, 同時にその大きさも小さくなる傾向が見られる.

この力学問題を支配する力学パラメータは弾性方程式(17)に含まれている特性値  $\alpha L$  と右辺の荷重項に掛かっている  $I_g/I_f$  である.  $\alpha L$  も以下のように分解すると

$$(\alpha L)^2 = \frac{I_g}{I_n} \frac{I_g}{I_f} \frac{h'}{h} \frac{GA_w L^2}{EI_g} = \frac{I_g}{I_f \lambda_2} \tag{19}$$

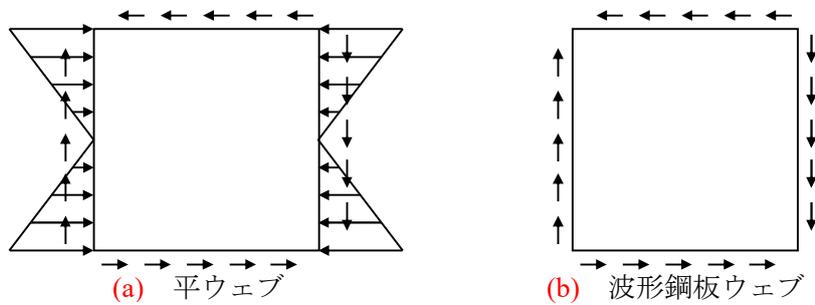


図3-54 一般の桁と波形鋼板ウェブの面内応力の比較

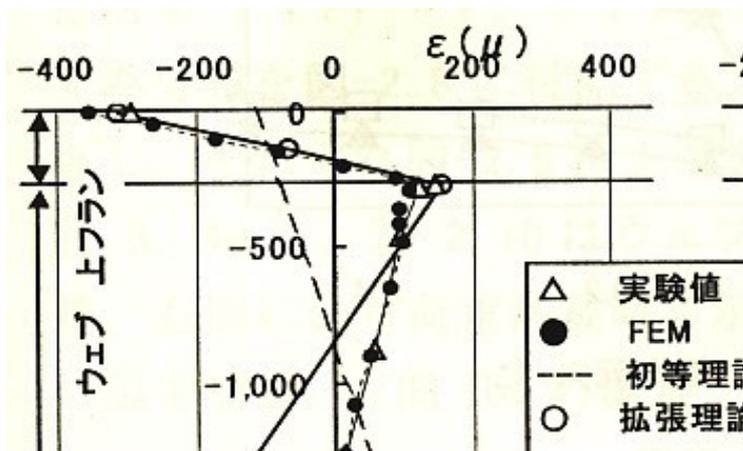


図3-55 集中荷重作用点直下の桁内のひずみ分布 (実験データとの比較)

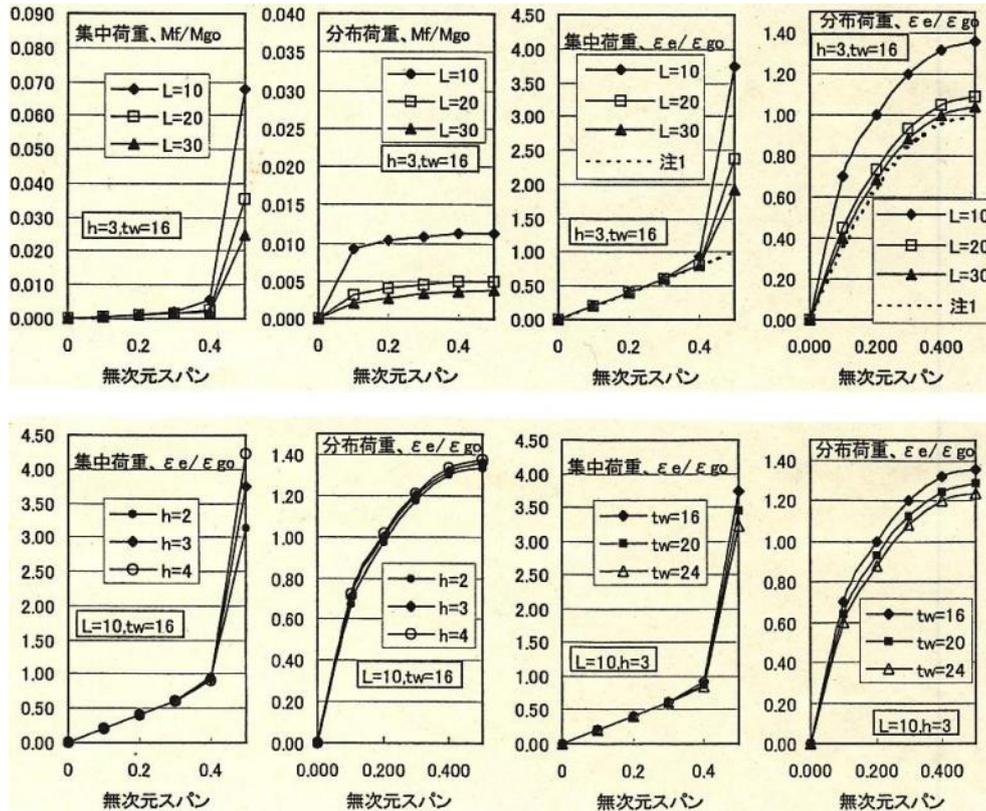


図3-56 波形鋼板ウェブ PC 桁の床版モーメントおよび直ひずみの分布

となるから, 分かり易さの観点からこの問題を支配する力学パラメータはせん断パラメータ  $\lambda_s$  と断面 2 次モーメント比  $I_g/I_f$  と考えると良い.

(3) 不静定構造への拡張 (マトリクス変位法)

波形鋼板ウェブ PC 桁は単純桁として用いられることは稀で, 連続桁橋や斜張橋として使用される. このような構造の実務設計段階で有限要素法を適用して, 詳細な応力解析を行うことは極めて煩雑である. そこで前項で誘導した基礎微分方程式の解を用いて, 波形鋼板ウェブ PC 桁構造専用のマトリクス変位法を誘導しよう. 連続桁構造を対象とした特殊な 3 連モーメント公式 (文献では 2 重 3 連モーメント公式と称している) を導くこともできるが, マトリクス変位法は斜張橋も含めて適用範囲が広い特長がある.

1) 節点変位ベクトル

$i$  節点と  $j$  節点を結ぶ波形鋼板ウェブ PC 桁の節点変位ベクトル  $\{X\}$  は

$$\{X\} = \{v_i, (dv/dx)_i, \phi_i, v_j, (dv/dx)_j, \phi_j\}^T \tag{20}$$

これらの節点変位を式(18)の  $C_0$  を除いた未定係数ベクトル  $\{C\}$  で表す.

$$\{X\} = [A]\{C\} \tag{21}$$

ここに,

$$\{C\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}^T \tag{22}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 6\beta & 0 & \zeta \\ 1 & L & L^2 & L^3 & Ch & Sh \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & \alpha Sh & \alpha Ch \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 + 6\beta & \zeta Sh & \zeta Ch \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここに,  $Ch = \cosh(\alpha L)$ ,  $Sh = \sinh(\alpha L)$ ,  $\beta = I_g / I_f \alpha^2$ ,  $\zeta = -\alpha I_f / I_n$

2) 材端力ベクトル

同様に,  $i$  節点と  $j$  節点を結ぶ波形鋼板ウェブ PC 桁の材端力変位ベクトル  $\{F\}$  は

$$\{F\} = \{P_{yi} \ M_{\beta i} \ M_{ni} \ P_{yj} \ M_{\beta j} \ M_{nj}\}^T \quad (24)$$

材端力を式(18)の  $C_0$  を除いた未定係数ベクトル  $\{C\}$  で表す.

$$\{F\} = [B]\{C\} \quad (25)$$

ここに,

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6EI_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2EI_f & 0 & -EI_f \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2EI_n & 0 & -EI_n \zeta \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6EI_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2EI_f & 6EI_f L & EI_f \alpha^2 Ch & EI_f \alpha^2 Sh \\ 0 & 0 & 2EI_n & 6EI_n L & EI_n \zeta \alpha Ch & EI_n \zeta \alpha Sh \end{bmatrix} \quad (26)$$

3) 剛性マトリックス

式(25)に式(21)を代入すると,

$$\{F\} = [B][A]^{-1}\{X\} = [K]\{X\} \quad (27)$$

4) 適用例

上記のマトリクス変位法を適用した 2 つの例題を示そう.

3 径間連続桁

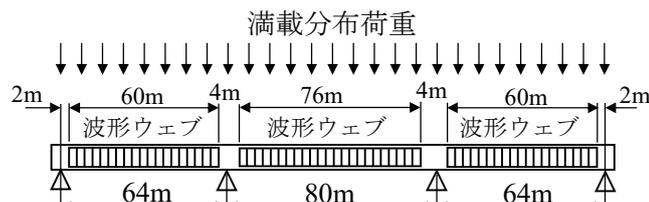


図 3-57 波形鋼板ウェブ 3 径間連続桁

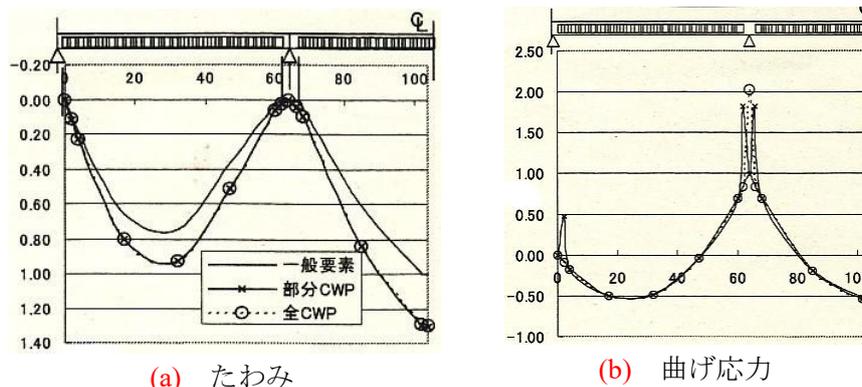


図 3-58 連続桁のたわみと曲げ応力

図 3-57 に示す 3 径間連続桁が等分布荷重を満載している状態を考える. 簡単のために断面は等断面とする. 波形鋼板ウェブ PC 桁の特徴を明らかにするためにウェブに波形鋼板を用いない一般の PC 桁としたケース (一般要素ケース) と端支点および中間支点上に一般要素 (波形鋼板を用いない) を用いた場合 (部分 CWB ケース), および全ての要素に CWB 要素を用いたケース (全 CWB ケース) を比較した.

図 3-58 (a) にたわみ, (b) に全曲げモーメントに対するコンクリート床版の曲げモーメント比 ( $M_f/M_g$ ), (c) に上床版に生じる曲げ応力比を示す. たわみは一般要素ケースの中央径間中点における値で除して無次元表示し, 曲げ応力については一般要素ケースの中間支点における曲げ応力で除して無次元表示している. たわみに関しては波形鋼板ウェブの場合は支点近傍における曲率が大きいいため, 一般要素ケースに比べ 30% 程度増加している. 部分 CWB と全 CWB のたわみはほとんど変わらない. 床版が分担する曲げモーメント比については, CWB 要素の場合, 一般要素に接続する部分で大きくなる. それでも曲げモーメント比そのものは大きくないが, 曲げ応力はコンクリート床版の断面係数が小さいため支点近傍で顕著に大きな値となる. このような局部応力に対して適切な構造法を適用する必要がある.

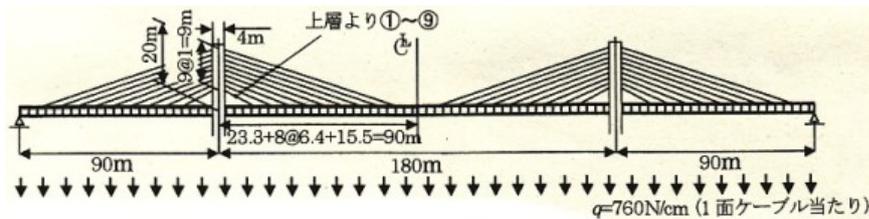


図 3-59 波形鋼板ウェブ複合桁を有する斜張橋のモデル

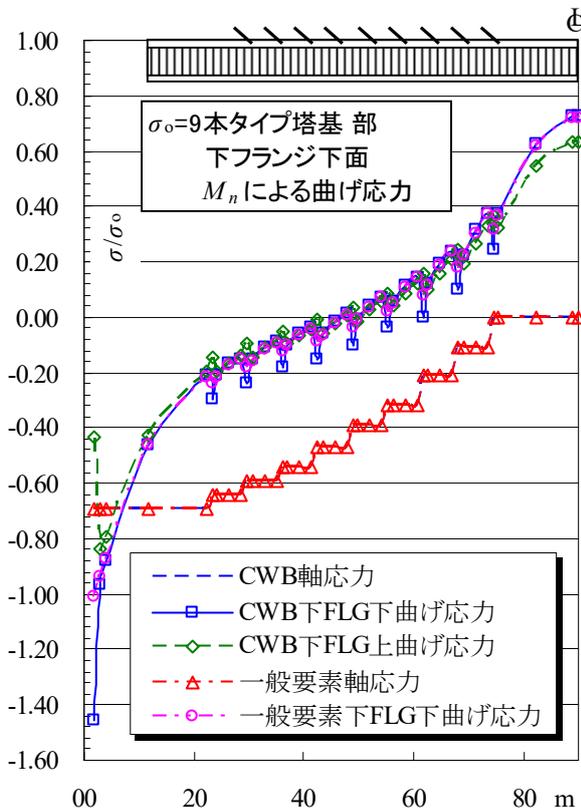


図 3-60 コンクリート床版の直応力分布 (ケーブル段数 9)

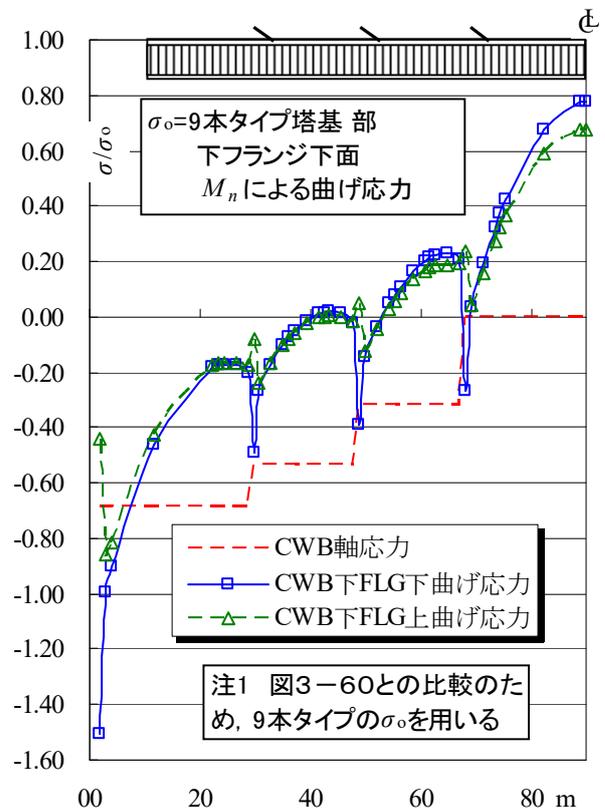


図 3-61 コンクリート床版の直応力分布 (ケーブル段数 3)

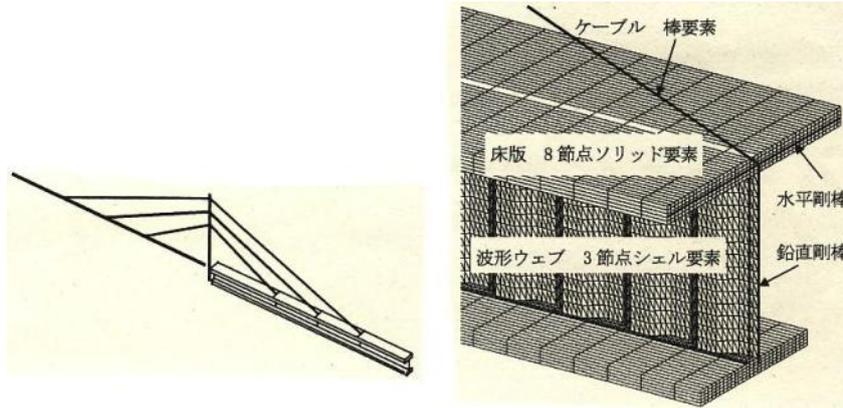
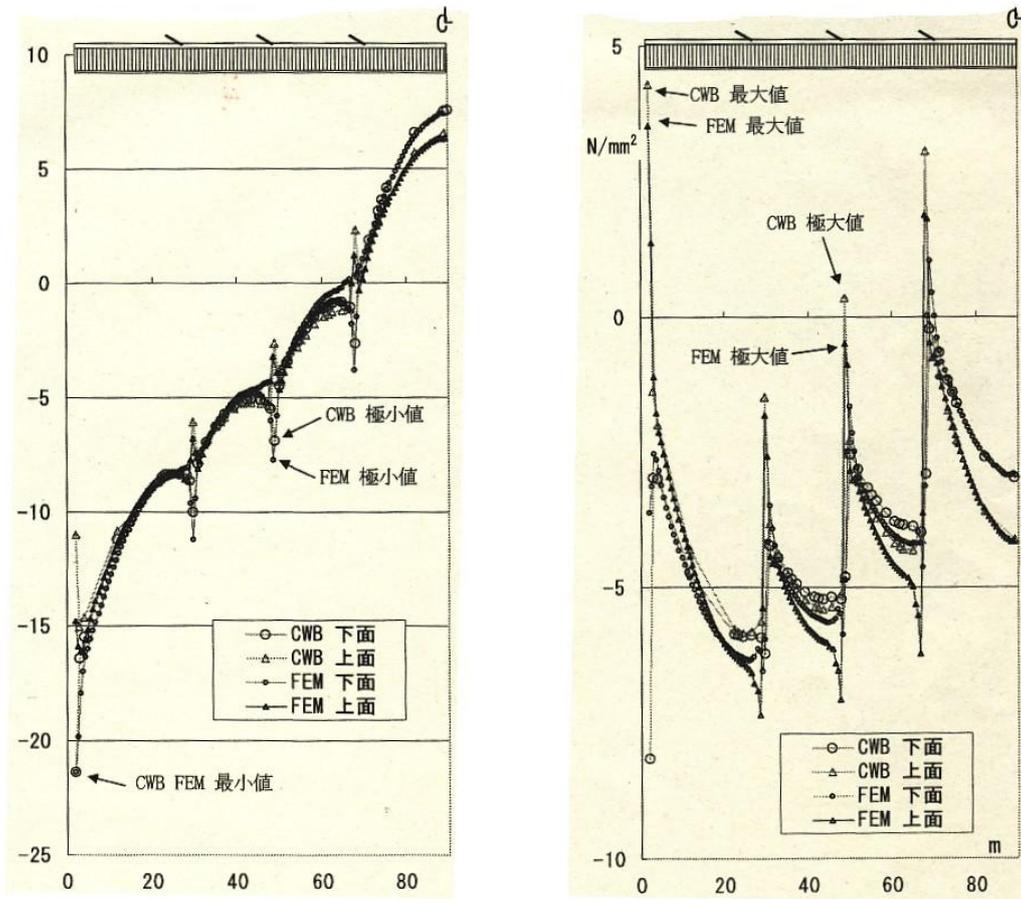


図 3-62 斜張橋の有限要素分割



(a) 下フランジ発生応力

(b) 上フランジ発生応力

図 3-63 CWB と FEM による斜張橋のコンクリート床版直応力の比較

主桁に波形鋼板ウェブを使用した斜張橋

図 3-59 に示す PC 斜張橋の主桁ウェブに波形鋼板を使用した構造のコンクリート床版の応力特性を調べる。斜張橋の主桁に集中力が作用する個所は、中間支点とケーブル定着部である。図 3-59 に示した斜張橋は 9 段のマルチケーブルタイプであり、ケーブル 1 本あたりの張力は小さいので、図 3-60 のようにケーブル定着部におけるコンクリート床版の 2 次曲げはそれほど顕著には現れず、中間支点部の局部的 2 次曲げが目立っている。ケーブル段数を 3 とした場合は、ケーブル定着部に作用する集中力が大きくなり、図 3-61 のようにコンクリート床版の 2 次曲げは中間支点部だけでなくケーブル定着部でも無視できない大きさとなる。

図 3-6-2 の要素分割を用いた有限要素解析と比較することにより，複雑な構造に対する拡張骨組理論 (CWB) の有効性を確認する。図 3-6-2 は中央径間側の桁の上下フランジ両面における応力分布を表している。大きい支点反力が作用する中間支点近傍において，コンクリート床版の直応力が大きく変動している。また，ケーブル定着部においても，ケーブル力に対してコンクリート床版の直応力が大きく変動している。拡張骨組理論 (CWB) は，このような波形鋼板ウェブを有する桁の特性を表現できている。

実橋における応力分布には構造詳細が影響し，骨組構造としての応力だけでは実態を評価できないが，詳細な有限要素解析の結果として捉えられた応力分布に現れる特性の力学的解釈のために拡張骨組理論の有効性が理解できる格好の例題である。

### 3. 6 の参考文献

- 1) 加藤久人・川畑篤敬・西村宣男：波形鋼板ウェブを有する鋼・コンクリート複合構造橋梁の変位と断面力の実用計算法，土木学会論文集，No.703/I-59，2002.
- 2) 加藤久人・西村宣男：波形鋼板ウェブを有する連続桁および斜張橋の実用計算法，土木学会論文集，No.731/I-63，2003.
- 3) 白谷宏司・池田博之・今井義明・加納宏一：波型鋼板ウェブ複合橋梁の中間支点部の曲げせん断挙動特性に対する基礎的研究，土木学会論文集，no.724/I-62，2003.

### 3. 7 高力ボルト摩擦接合継手における板厚差の影響

#### (1) はじめに

JIS 規格による鋼板の板厚公差はマイナス側に 5% となっている。公称板厚からの誤差は板厚 20mm で 1mm, 50mm では 2.5mm の差が認められることになっている。プラス側の板厚公差については特に規定はないので，JIS 規格で許容される板厚はもっと大きい可能性がある。しかし同一のロットから製造された鋼板にはそれほどの板厚差は存在しないので，高力ボルト摩擦接合継手における被接合材の板厚差は異なる製鉄メーカーから購入された鋼板が採用される可能性がある JV の境界の接合部などで発生する可能性が高い。

また，最近の鋼桁橋ではフランジの板厚変化を，製作工程の合理化のために現場継手で行うようになってきている。フランジの板厚差はフィラープレートを挿入することによって，可能な限り被接合材の板厚差が小さくなるように配慮されるが，マーケットサイズの鋼板の板厚は多様ではないので板厚差を 0 にすることは困難である。このような現実を考慮すると，高力ボルト摩擦接合現場継手における被接合材の板厚差に関する許容値を規定する必要があるように思われる。

このような高力ボルト摩擦接合継手における許容板厚差は特別な機能を有する有限要素解析によって明らかにすることができるが，関与するパラメータの数が多く，全てを有限要素解析によって設計データを揃えることは現実的ではないし，また有限要素解析結果の力学的解釈に役立つ拡張骨組理論の有効性が発揮され格好のテーマでもある。ここで適用される拡張骨組理論は 2. 3 で述べたせん断変形を考慮したはりの 3 連モーメント公式である。ただし，連結板の有効断面など拡張骨組理論単独では精度の良い公式を提示することが困難であり，有限要素解析の結果を活用して，一部の係数を同定する手法を用いている。そのような拡張骨組理論と離散的解析法の協働の例としてこの節を理解して欲しい。

#### (2) 構造モデル

図 3-64 に示す複せん断継手を考える。板厚差は両側の連結板の板曲げ変形によって吸収されると考える。ただし，現実には鋼桁のフランジ接合を考えると，片側にウェブが存在することにより，必ずしも両側で均等に板厚差が吸収される訳ではないことにも留意しておく必要がある。

板厚差が小さい場合は最内列ボルトの締め付けにより板厚差が解消され，2 列目より外側のボルトの

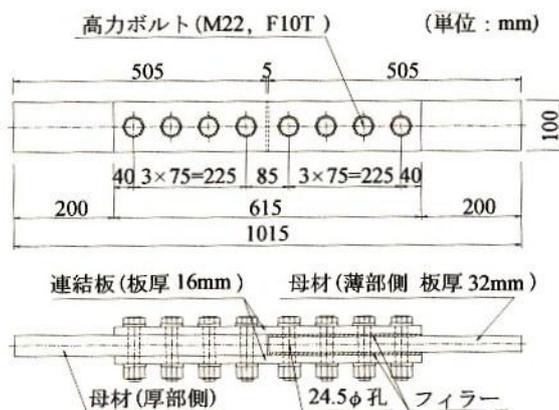


図 3-64 板厚差を有する高力ボルト摩擦接合継手

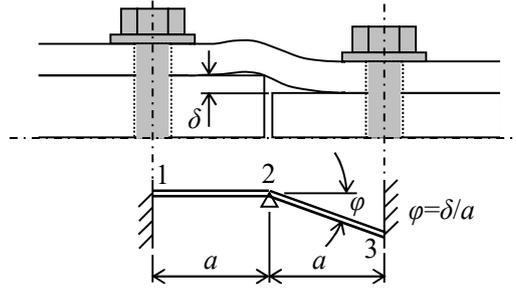


図 3-65 板厚差を有する継手における連結板の連続ばりモデル

締め付け力は連結板と母材間の摩擦に有効に作用する。問題は最内列ボルトの締め付け力が連結板の板曲げに消費され本来の摩擦接合継手に要求される連結板と母材の間の接触圧に寄与できないことにある。板厚差が大きいと最内列ボルト位置で連結板と母材は密着せず，2 列目より外側のボルト軸力の有効性に板厚差の影響が及ぶ。このような板厚差は許容値の検討には論外であり，構造モデルは最内ボルト位置で連結板と母材が密着する範囲の板厚差を対象とする。

(3) せん断変形を考慮した 3 連モーメント公式の適用

接合される母材同士の板厚差により連結板と母材の離間が生ずるのは両側の最内列ボルトの間である場合，図 3-65 に示すような連続ばりを考える。母材の板厚差によって薄部側の径間に部材回転角  $\beta = \delta/2a$  を考えることになる。

支点 1, 2 および 3 について，2, 3 で示したせん断変形を考慮した 3 連モーメント公式を適用すると

$$2M_1(1+3\lambda_s) + M_2(1-6\lambda_s) = 0 \tag{1}$$

$$M_1(1-6\lambda_s) + 4M_2(1+3\lambda_s) + M_3(1-6\lambda_s) + \frac{6\beta EI}{a} = 0 \tag{2}$$

$$M_1(1-6\lambda_s) + 2M_3(1+3\lambda_s) - \frac{6\beta EI}{a} = 0 \tag{3}$$

ここに， $EI$ ：連結板の曲げ剛性， $\lambda_s$ ：連結板のせん断パラメータ， $a$ ：内側縁端距離， $t_s$ ：連結板厚。式(1)～(3)で与えられる連立方程式を解くと支点上モーメントは

$$M_i = \frac{C_i \beta EIS}{a} = \frac{C_i \delta EIS}{a^2} \quad (i=1,2,3) \tag{4}$$

ここに， $C_1 = \frac{3(1-6\lambda_s)}{2(1+3\lambda_s)(1+12\lambda_s)}$ ， $C_2 = -\frac{3}{1+12\lambda_s}$ ， $C_3 = \frac{9(1+6\lambda_s)}{2(1+3\lambda_s)(1+12\lambda_s)}$

右支点の反力  $R_3$  は，支点上モーメントにより以下のように与えられる。

$$R_3 = -\frac{C_4 \delta EIS}{a^3} \tag{5}$$

ここに， $C_4 = \frac{3(5+24\lambda_s)}{2(1+3\lambda_s)(1+12\lambda_s)}$

ここで与えられる支点反力は，導入されたボルト初期導入軸力のうち，板厚差を解消するために連結板の曲げ変形に消費された量である。ボルトの初期導入軸力  $P_0$  を次のように表す。

$$P_0 = c \sigma_{B_s} A_B \tag{6}$$

ここに， $c$ ：高力ボルトの導入応力レベル， $\sigma_{YB}$ ：高力ボルトの降伏応力度， $A_B$ ：高力ボルトの有効断面積． $R_3$ を $P_0$ で除すと最内ボルトの初期導入軸力のうち連結板の曲げに消費された軸力の割合となる．

$$\frac{R_3}{P_0} = \frac{C_4 E}{c \sigma_{YB}} \frac{b \delta}{A_B} \left( \frac{t_s}{a} \right)^3 \frac{S}{12} \quad (7)$$

ここに， $S$ は連結板の形状やボルト孔の影響を考慮するための調整係数で有限要素解析結果にフィットするように同定する．

最内ボルトのみが影響を受ける程度の板厚差に対して，ボルト  $n$  列の継手における連結板と母材間の接触圧の減少量，すなわち継手効率  $r$  は

$$r = 1 - \frac{R_3}{nP_0} \quad (8)$$

と表すことができる．式(7)から高力ボルト摩擦接合継手における被接合材片の板厚差問題は，高力ボルトの材料特性 ( $E/c\sigma_{YB}$ )，片面板厚差の無次元量 ( $b\delta/A_B$ )，連結板厚と内側縁端距離の比 ( $t_s/a$ ) で評価でき， $t_s/a$  の 3 乗に比例することが明らかとなった．

なお，連結板のせん断パラメータ  $\lambda_s$  は，

$$\lambda_s = \frac{\kappa EI}{GAa^2} = \frac{1.2E}{Gbt_s a^2} \frac{bt_s^3}{12} = 0.1 \frac{E}{G} \left( \frac{t_s}{a} \right)^2 \quad (9)$$

と表され，弾性係数比  $E/G$  と連結板厚と内側縁端距離の比 ( $t_s/a$ ) に関係している．

#### (4) 有限要素解析結果との比較

高力ボルト摩擦接合継手のすべり限界強度を解析できるプログラムソフトとしては，幾つかの汎用ソフトがある．ただしそれらは利用者がかなり工夫することによって初めて適用可能であると言われている．筆者等が高力ボルト摩擦接合継手の限界強度の解析を目的として開発した **SABOL** (**S**lip **A**nalysis of **B**olted **S**tructures) は被接合材片の板厚差問題に対しても有効である．

##### 1) 解析モデル

継手モデルの有限要素分割例を図 3-66 に示す．被接合材片の板厚（直接的には連結板板厚），ボルト列数，内側縁端距離，すべり・降伏耐力比等の影響を定量的に明らかにする必要がある．そこで表 3-9 に示す 12 系列の解析モデルを考えた．それぞれの系列には片面板厚差 0mm, 0.5mm, 1.0mm, 1.5mm, 2.0mm の 5 ケースが含まれており，個々のケースは板厚差の小さい順に，例えば A-1, A-2, A-3, A-4, A-5 と表記する．なお母材の板厚差は片側の母材板厚を標準値より板厚差分だけ増すことによって与えている．

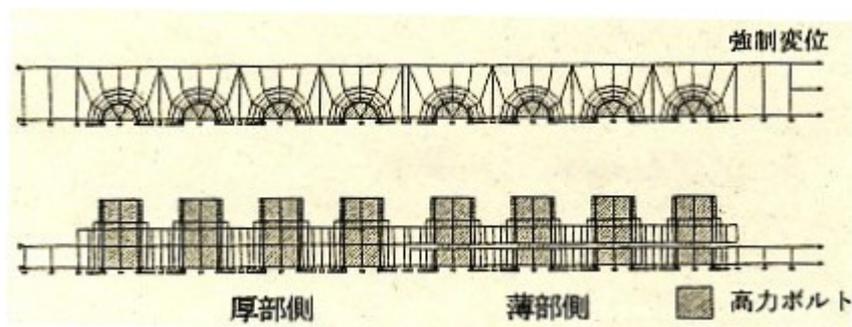


図 3-66 有限要素モデルと要素分割

表 3-9 有限要素解析モデルの一覧

系列タイプ	板厚 (mm)		鋼種	ボルトの配置		β 値
	母材 t	連結板 t <sub>s</sub>		列数 n	a' (mm)	
A-	32	16	SM490Y	4	40	0.770
B-	40	16	SM490Y	4	40	0.770
C-	32	19	SM490Y	4	40	0.770
D-	32	16	SM570	4	40	0.607
E-	24	12	SM490Y	3	40	0.770
F-	40	20	SM490Y	5	40	0.770
G-	50	25	SM490Y	4	40	0.493
H-	20	10	SM490Y	4	40	1.232
I-	30	15	SM490Y	4	40	0.821
J-	40	20	SM490Y	4	40	0.616
K-	50	25	SM490Y	4	55	0.493
L-	50	25	SM490Y	4	70	0.493

a': 継手中心部の母材の縁端距離  
β=継手の公称滑り耐力/公称降伏応力

表 3-10 簡易算定式と有限要素法によるすべり耐力比の比較

解析モデル	すべり耐力比		A/B
	A	B	
A-2	0.958	0.958	1.000
B-2	0.958	0.980	0.978
C-2	0.846	0.887	0.954
D-2	0.958	0.984	0.974
E-2	0.972	0.924	1.052
F-2	0.944	0.938	1.006
G-2	0.891	0.891	1.000
I-2	0.967	0.943	1.025
J-2	0.930	0.942	0.987
K-2	0.968	0.968	1.000
L-2	0.970	0.970	1.000

A: 簡易算定式(式(8))によるすべり耐力比  
B: 有限要素解析によるすべり耐力比

表 3-11 有限要素法による解析モデルのすべり耐力比

系列タイプ	t <sub>s</sub> /a	b/a	すべり耐力比			
			*=2 (δ=0.5)	*=3 (δ=1.0)	*=4 (δ=1.5)	*=5 (δ=2.0)
A-*	0.376	2.353	0.958	0.925	0.855	0.800
B-*	0.376	2.353	0.980	0.928	0.859	0.798
C-*	0.447	2.353	0.887	0.849	0.801	0.780
D-*	0.376	2.353	0.984	0.930	0.871	0.813
E-*	0.282	2.353	0.924	0.847	0.807	0.715
F-*	0.471	2.353	0.938	0.890	0.840	0.787
G-*	0.588	2.353	0.891	0.799	0.786	0.712
H-*	0.235	2.353	0.974	0.922	0.909	0.843
I-*	0.353	2.353	0.943	0.895	0.857	0.799
J-*	0.471	2.353	0.942	0.869	0.798	0.757
K-*	0.435	1.739	0.968	0.883	0.872	0.819
L-*	0.345	1.379	0.970	0.910	0.888	0.860

H系列は降伏耐力比を示す。  
a: 継手中心から第1ボルトまでの距離(=a'+2.5mm)  
δ: 片面板厚差(単位:mm)

系列 A を基準モデル系列（母材標準板厚 32mm，高力ボルト F10T，M22，4 列，内側縁端距離 40mm，鋼種 SM490Y）とし，系列 B および C は母材板厚または連結板板厚を基準モデル系列より若干増厚したモデル，系列 D は鋼種を SM570 に変更したモデル，系列 E および F はすべり・降伏耐力比 β を基準モデルと同一としてボルト列数を 3 または 5 としたモデルである。また系列 G，K および L は高力ボルト摩擦接合継手が採用される最も厚板の場合に焦点を当て，内側縁端距離を基準モデルの 40mm から 55mm および 70mm と変化させたモデル，系列 H，I および J は連結板板厚の影響を調査するモデルである。

2) 調整係数の同定と簡易評価式の精度

表 3-10 では，解析モデルの中で片面板厚差が 0.5mm のケースについて SABOL による有限要素解析結果と簡易評価式(8)による算定値を比較している。それに先立ち A-2，G-2，K-2 および L-2 の 4 ケースを用いて調整係数の同定を行っている。調整係数 S は定数項，t<sub>s</sub>/a に比例する項，b/a および(b/a)<sup>2</sup> に比例するように 4 つの未定係数を含めて

$$S = s_1 + s_2 \frac{t_s}{a} + s_3 \frac{b}{a} + s_4 \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

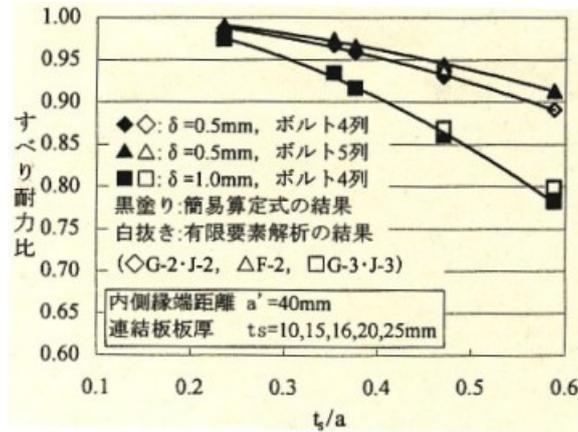


図 3-67 すべり耐力比と  $t_s/a$  の関係

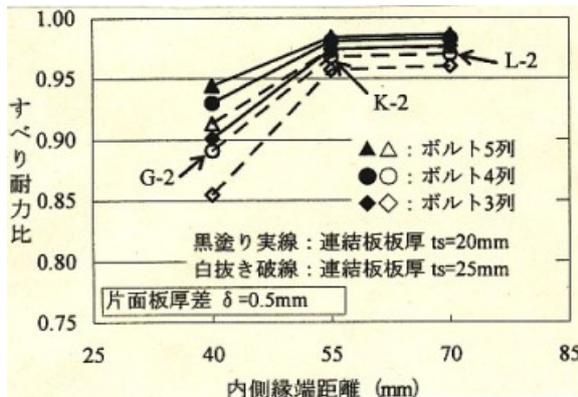


図 3-68 すべり耐力と内側縁端距離の関係

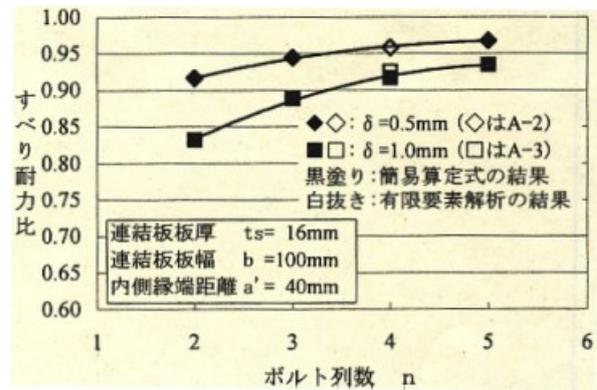


図 3-69 すべり耐力とボルト列数の関係

と表し、4つのモデルについて結果が一致するように未定係数を決定する。

$$S = 0.885 - 0.047 \frac{t_s}{a} - 0.823 \frac{b}{a} + 0.225 \left( \frac{b}{a} \right)^2 \quad (10)$$

この調整係数を用いて、他の解析ケースについても比較したのが表 3-10 である。同定に用いた 4 ケースは  $a/b$  が 1.000 となるのは当然であるが、それ以外のケースについても  $\pm 5\%$  の範囲で両者は対応している。

(5) 被接合材片の板厚差によるすべり耐力の減少

表 3-9 の解析モデルのすべり耐力比 (板厚差が無い場合のすべり耐力を基準として評価) の有限要素解析結果を表 3-11 に示す。系列 H はすべり・降伏耐力比  $\beta$  が 1 を超えるモデルで、継手の降伏がすべりに先行するのですべり耐力比の替わりに降伏耐力比を示している。解析モデルはできるだけ幅広く板厚差の影響を明らかにすることを目標として設定されたので、片側板厚差 2.0mm までを含んでおり、板厚差の影響を受けるボルトは最内列に留まらず、第 2 列目、場合によっては第 3 列目まで及ぶモデルもある。そのような板厚差を許容することは論外で、板厚差の許容値の議論においては板厚差の影響が及ぶボルトは最内列ボルトに限定される 0.5mm ないしは 1.0mm のモデルに限定するべきである。

図 3-67 に簡易評価式(8)を用いて求めたすべり耐力比と力学パラメータ  $t_s/a$  の関係を示す。図中に有限要素解析の結果もプロットしている。連結板板厚が 20mm 以下であれば、板厚差 1mm で管理すれば、板厚差に起因するすべり耐力の低下は 5% に留まる。

図 3-68 はすべり耐力比と内側縁端距離の関係を表している。連結板板厚が 20mm および 25mm の場合、内側縁端距離をそれぞれ 50mm および 55mm とすることにより、許容板厚差を 1mm で管理すればすべり耐力の低下を 5% 以下に抑えることができる。

図 3-69 はすべり耐力比とボルト列数の関係を表している。曲線は簡易算定式によるもので、該当する有限要素解析結果もプロットしている。ボルト列数の増加は板厚差によるすべり耐力の低下を緩和している。

#### (6) 実務設計・製作への提言

高力ボルト摩擦接合継手の品質保証を目的として、設計および製作段階において、被接合材片（母材およびフィラープレート）の板厚差の影響を排除する現実的な方策として以下の提言を行う。

被接合材片の板厚差の許容値は 1mm（片面板厚差 0.5mm）とする。この制限によってすべり耐力の低下は 5%以下（連結板板厚 20mm 未満）となる。

連結板板厚が 16mm を越える厚板の高力ボルト摩擦接合継手においては上記の板厚差制限以外に、設計時に内側縁端距離  $a$  を次のように採る。

$$a = t_p + 24 (\text{mm}) > 40 (\text{mm})$$

### 3. 7 の参考文献

- 1) 秋山寿行・木村充・小澤克郎・西村宣男：被接合材片に板厚差を有する高力ボルト摩擦接合継手のすべり耐力，土木学会論文集 A，Vol.63，No.1，2007.

## 研究ノート NN-08-48

## 照査のための構造力学・第4章・応力集中の纏め方

平成20年10月13日

西村宜男

**概要：**「照査のための構造力学・第4章 応力集中」に用いる典型的な応力集中問題の解析方針と纏め方について述べる。今日的課題である鋼床版の横桁とトラフリブの交差部や鋼製ラーメン橋脚隅角部における応力集中問題は「第5章 薄板構造における局部応力問題と集中力の分散過程」で取り扱うことにする。

## 1. 「第4章 応力集中」の構成

設計技術者向きに整理された応力集中問題の基礎資料を取り纏めたい。第4章は、以下の構成とする。

### 4.1 概説

鋼構造設計においては、応力集中に関する知識が必要であること、その知識の系統的な獲得の方法と、本節の構成を述べる。

### 4.2 応力集中問題の評価法

応力集中現象の評価法として、弾性論、有限要素法を紹介する。

### 4.3 典型的な開孔部・断面急変部の応力集中現象の整理

次節で述べるような典型的な応力集中部と応力集中係数に関するデータベース化について記述する。

### 4.4 開孔部の集中応力の緩和法

応力集中係数を低減するための形状改善，ダブリング補強，フランジ補強補剛材補強について，事例を中心に解説する。

### 4.5 桁端切り欠き部における応力集中と応力の緩和法

鋼桁端部の切り欠き構造における応力集中問題と，集中応力を緩和するための構造法について解説する。

### 4.6 特殊な応力集中現象の事例

特殊な応力集中現象として，孔あき鋼管構造の応力集中およびせん断キーの3次元効果による応力集中現象の解析例を紹介する。

## 2. 応力集中問題の評価法

応力集中問題の評価は，現在のようなコンピュータ環境が整備される前は光弾性による測定が主流であった。光弾性による測定法の弱点は，複雑な構造に対して適用が困難なことである。これに対して有限要素法による数値シミュレーションによれば，構造の複雑さや3次元効果による応力集中問題も含めて適用範囲は広く，最近の複合材料（繊維補強による異方性）を扱うこともできる。

この節では，応力解析のためのアイソパラメトリック要素（セレンディピティ2次要素）を用いた2種類の有限要素ソフトの機能について説明する。局所的な応力変化を効率的に表現するためには，一定ひずみ要素（CST）や線形要素ではなく，2次要素（平面弾性問題では8節点要素，立体弾性問題で

は 20 節点要素) が適している。筆者の研究履歴からこれらのソフトは全て弾塑性有限変位問題に適用できるように開発されているが，それらを弾性問題に限定して紹介する。

### 3. 典型的な開孔部・断面急変部の応力集中問題

典型的な応力集中問題としては，開孔部，断面急変部および切り欠き部を考える。

#### (1) 開孔部

種類としては孔の形状，作用力，無限板 or 有限板の 3 つのパラメータで整理する。孔の形状としては，円孔，楕円孔，長円孔，その他で分ける。作用力としては，引張，曲げおよびせん断とする。3 つのパラメータで区分した応力集中問題は表-1 の通りである。

以下に，表-1 に掲げた応力集中問題の構造モデル・関与するパラメータ・応力集中係数の表現方法について示す。

#### 1) C-I-1-T 円孔，無限板，1 軸引張

弾性論の解析解あり

応力集中係数を示す。

2 次要素を用いた要素分割図（適切な要素分割）を示す。

#### 2) C-I-2-T 円孔，無限板，2 軸引張

弾性論の解析解あり

表-1 有孔部の応力集中の分類

記号	孔の形状	無限板 or 有限幅板	作用力	備考
C-I-1-T	円孔	無限板	1 軸引張	
C-I-2-T			2 軸引張	
C-I-T-C			2 軸引張・圧縮	
C-F-1-T		有限幅板	1 軸引張	
C-F-B			曲げ	
C-F-1-T-E			1 軸引張	
C-F-B-E	有限幅板の偏心円孔		曲げ	
E-I-1-T	楕円孔	無限板	1 軸引張	長軸・単軸の向き
E-F-1-T		有限幅板	1 軸引張	
E-F-B			曲げ	
L-I-1-T	長円孔	無限板	1 軸引張	長軸・単軸の向き
L-F-1-T		有限幅板	1 軸引張	
L-F-B			曲げ	
R-I-S	R 付き長方形孔	無限板	せん断	
R-F-T		有限幅板	引張	
R-F-B			曲げ	

応力集中係数を示す.

- 3) C-I-T-C 円孔, 無限板, 2 軸引張・圧縮 (せん断)  
弾性論の解析解あり  
応力集中係数を示す.
- 4) C-F-1-T 円孔, 有限幅板, 1 軸引張  
光弾性実験による近似式が与えられている.  
$$\alpha = 2 + \{(b - \rho)/b\}^2$$
基準応力は最小断面の平均応力
- 5) C-F-B 円孔, 有限幅板, 面内曲げ  
FEM 解析により新規にデータを作成する. 応力分布図および応力集中係数と力学パラメータの関係.
- 6) C-F-1-T-E 有限幅板の偏心円孔, 有限幅板, 1 軸引張  
FEM 解析により新規にデータを作成する. 応力分布図および応力集中係数と力学パラメータの関係.
- 7) C-F-B-E 有限幅板の偏心円孔, 有限幅板, 面内曲げ  
FEM 解析により新規にデータを作成する. 応力分布図および応力集中係数と力学パラメータの関係.
- 8) E-I-1-T 楕円孔, 無限板, 1 軸引張  
光弾性実験による近似式が与えられている.  
$$\alpha = 2b/a + 1, \quad b/a \text{ は軸長比}$$
- 9) E-F-1-T 楕円孔, 有限幅板, 1 軸引張  
光弾性実験による応力集中係数の特性図あり.
- 10) E-F-B 楕円孔, 有限幅板, 面内曲げ  
光弾性実験による応力集中係数の特性図あり.
- 11) L-I-1-T 長円孔, 無限板, 1 軸引張  
長軸が応力方向の場合, 光弾性実験による応力集中係数の特性図あり.
- 12) L-F-1-T 長円孔, 有限幅板, 1 軸引張  
長軸が応力直角方向の場合, 光弾性実験による近似式が与えられている.  
$$\alpha = \left\{ 2 + (1 - b/B)^3 \left[ 1 + 2/3 \cdot \left\{ 1 - (b/B)^6 \right\} \sqrt{b/\rho} - 1 \right] \right\}$$
- 13) L-F-B 長円孔, 有限幅板, 面内曲げ  
長軸が応力方向の場合, 光弾性実験による近似式が与えられている.

長軸が応力直角方向の場合，光弾性実験による近似式が与えられている

$$\alpha = 2[0.6 + 0.4 \exp\{-1.5(a/\rho - 1)\}]$$

$$\sigma_0 = \frac{3M}{2t}(B^3 - b^3)$$

- 14) R-I-S R 付き長方形孔，無限板，せん断  
光弾性実験による応力集中係数の特性図あり。
- 15) R-F-T R 付き長方形孔，有限幅板，1 軸引張  
光弾性実験による応力集中係数の特性図あり。
- 16) R-F-B R 付き長方形孔，有限幅板，面内曲げ  
光弾性実験による応力集中係数の特性図あり。

## (2) 断面急変部

断面急変部の標準問題としては，トラス構造のフィレットや鋼桁のフランジ幅変化部を取り上げる。Heywood の与えた応力集中係数の近似式を中心として応力分布特性を説明する。

## 4. 開孔部における応力集中の緩和法

一般に，薄板構造において応力集中現象が発生するような構造詳細を用いる場合は，構造的弱点とならないように，何らかの補強構造法が用いられる。代表的な補強方法は，ダブリング補強，フランジ補強および補剛材補強である。

ダブリング補強は比較的小さい開孔による欠損断面積を補うように孔の周辺に沿って当て板を片面ないしは両面に貼り付ける構造である。フランジ補強はやや大きな開孔によって自由端を構成することによる面外剛性の不足を補剛することと開孔による断面欠損を補うことの両面を兼ねた構造法である。補剛材補強は開孔を含む板全体の面外剛性を確保することが必要な場合に採用される。

本節ではこれらの構造法の採用基準と構造寸法の決定について取り纏める。

## 5. 桁端切り欠き部における応力集中と緩和法

鋼桁の端支点部やゲルバー桁の中間ヒンジ部において，縦断方向のプロポーションを滑らかにするために，桁高さを急変させる構造法がしばしば採用される。曲げモーメントは小さい領域であるが断面急変部におけるせん断力による局部応力の処理に留意した設計が必要となる。本節では桁端切り欠き部の構造法と応力集中の緩和の程度について整理する。

## 6. 特殊な応力集中現象の事例

平面弾性問題における応力集中問題は西田正孝著“応力集中”や機械工学ハンドブックに詳しく紹介されている。この節では筆者が体験した2つの特殊な応力集中問題を紹介し、設計実務において参考にして頂きたい。

### (1) 有孔鋼管の孔周辺の応力集中

送電鉄塔トラスの部材として亜鉛めっきされた電縫鋼管が広く用いられている。径が太い主管は耐荷力と耐久性を持たせるためにコンクリート充填柱とするが、主管を繋ぐ腹材は径が小さいこととせん断力を担うに過ぎないことから、未充填の電縫鋼管が使用される。

沿岸部に立地する送電鉄塔において、鋼管部材の腐食損傷が数多く報告されるようになったので、孔食損傷を受けた電縫鋼管部材の座屈耐力に関する検討を行った。

軸圧縮力を受ける有孔鋼管部材では、部材としての座屈現象に対して孔の両端における応力集中に起因する塑性化の影響が現れる。当初、無限板における円孔周りの応力集中係数 3.0 程度と考えていたが、局所的板曲げ変形の影響により管の内外面の応力差が大きく、応力集中係数は有限要素解析によると 5.0～7.0 になることが分かった。一定以上の孔径になると最終的に円孔はレモン型に変形する。

このように有孔鋼管の孔周辺の応力集中問題は、平面弾性問題としてのモデルでなくシェル構造としての特殊性を考慮しなければならない。鋼管橋脚のマンホールはフランジやダブリング補強されているが、阪神淡路大震災の損傷事例の中にマンホール周辺の塑性化（塗装の剥げ落ち）が見られたのも、この応力集中現象に関係しているかもしれない。

### (2) 跨座型モノレール PC 軌道桁の支承せん断キーの脆性破壊

阪神・淡路大震災において震源から 50km 離れた大阪モノレールの PC 軌道桁の支承をコンクリート橋脚に固定するための鋳鋼製のせん断キー（通称ダボ）が脆性破壊した。この被害の原因究明に関する検討によって明らかにされた結論の中に、せん断キーの応力集中が挙げられた。損傷原因は、大きな地震動（当該地点で 400gal 程度）により生じた動的現象により連続した単純支持軌道桁間（遊間 30mm）で衝突現象が発生し、その際の衝撃力が繰り返し作用したこと、せん断キーの材料の鋳鋼が衝撃吸収能にやや乏しかったことに加えて、せん断キーの構造的な問題として底板（500mm×500mm）と突出部（100mm×100mm）の結合部における応力集中が脆性破壊の起点となったとされた。別途、3次元有限要素解析によって明らかにされた局部応力は突出部の角で異常に大きく、設計で用いられた片持ちばりとしての曲げ応力に比べて応力集中係数 8.0～9.0 程度に達していた。

## 第4章 応力集中

### 4. 1 概説

孔の存在や断面の急変部を有する部材においては、平均応力を大きく超過する局所的な応力が発生する。この現象を応力集中（Stress concentration）、その最大応力と平均応力の比を応力集中係数と呼んでいる。このような応力集中現象は骨組の力学では記述できない問題であるが、構造物の設計においては、可能な限り応力集中が発生しないように、発生したとしても応力集中係数が適正な範囲に収まり、構造物の耐力に影響しない構造詳細を選択することが重要である。特に、繰り返し载荷による疲労破壊が発生する可能性がある場合は、亀裂進展特性までの知識を必要とする。このような局部応力は、第2章および第3章で述べた拡張骨組理論では記述できないので、別途の知識体系を構築する必要がある。

応力集中問題が設計する構造物に含まれていることを判定できる知識を獲得するための第1歩は、典型的な応力集中問題に関する知識データの蓄積と階層化である。2番目に応力集中の程度を評価するための解析法に関する基礎知識を獲得すること、そして3番目に、応力集中を緩和する構造法について事例を収集しておくことが大切である。

本章では、4. 2において応力集中を評価するための解析法を述べる。4. 3においては平面構造モデルにおける典型的な応力集中現象を対象として、応力集中部の形状と作用力をパラメータとした応力集中係数のデータベース化について述べる。4. 4では応力集中の緩和のために用いられる構造詳細の事例を説明する。4. 5では桁端切り欠き部における応力集中とその緩和法を説明する。4. 6では特殊な応力集中現象として著者が体験した事例を紹介する。

### 4. 2 応力集中問題の評価法

#### (1) 評価法の変遷

応力集中問題の最初の理論的評価は19世紀に基礎が築かれた弾性論による。残念ながら弾性論による応力集中問題の厳密解が与えられている問題は無限板の円孔周辺の応力など限定的である。これに対して、CokerとFilonによって発展した光弾性法（photo-elasticity）による実験的方法が1930年頃から良く用いられるようになった。さらに20世紀後半には偏光器とコンピュータ・画像処理装置を組み合わせた全域自動解析法（デジタル偏光器）による光弾性法へと発展している。

20世紀後半には有限要素法による離散的構造解析法が発展し、応力集中問題を含む応力評価の適用範囲が拡大している。

#### (2) 弾性論<sup>1)</sup>

各種の応力集中問題における応力分布を弾性論による閉じた解で表現できれば、構造特性と作用荷重の関係を統一的に整理することができるが、残念ながら閉じた解で表現できる応力集中問題は少ない。弾性論に拘るなら、級数解法を用いた近似解法を採用することになるが、応力集中のような特異の問題への適用性に問題があるし、荷重条件や境界条件に一般性を与えることが困難であるため、必要な情報を揃えることができない。

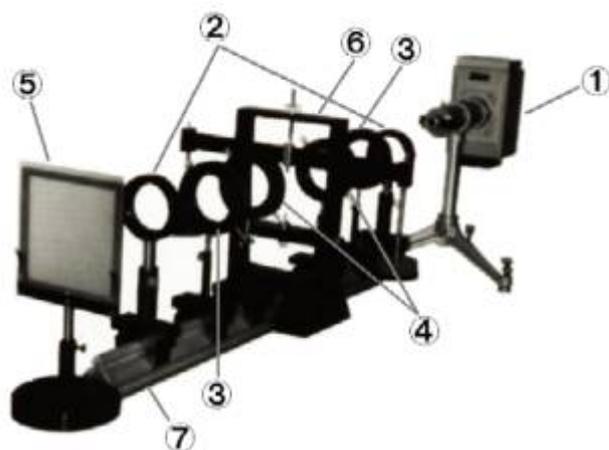
弾性論による閉じた解の用途は、典型的な応力集中問題における応力分布など、基本的特性の理解を

手助けすることのほか, 後述の有限要素解析における局所応力が厳密解(弾性論)と見なしうる限界の最適要素分割を判断する際にターゲットとして参照することである。次節の円孔を有する無限板の応力について, 弾性論の厳密解を示す。

### (3) 光弾性法<sup>2)</sup>

光弾性の原理は 19 世紀初頭に発見されていたが, 実用化は前述の Coker と Filon の開発によるところが大きい。光弾性法の原理は以下の通りである。外力を加えると, 発生するひずみの大きさと向きに応じて, 複屈折の大きさが変化する物質である光弾性体に偏光を当てて, 偏光器で観察すると, ひずみの大きさによって偏光に位相差を生じ, 干渉縞となって現れる。光弾性の画像には主応力方向を示す等傾線(isoclinics)と最大せん断応力が等しい点を結ぶ等色線(isochromatics)が現われる。**写真 4-1**は光弾性実験に用いられる標準的な偏光器の例で有る。偏光器には 2 種類がある。平面偏光器は光源と 2 つの直線偏光子(ポラライザー)で構成されており, 光源から出た光は第 1 の偏光子を通して直線偏光となる。この直線偏光を光弾性体に当て, その通過光を第 2 の偏光子を通して縞模様を観察する。これに対して円偏光器では, 平面偏光器に加えて 2 枚の 1/4 波長板を用いる。

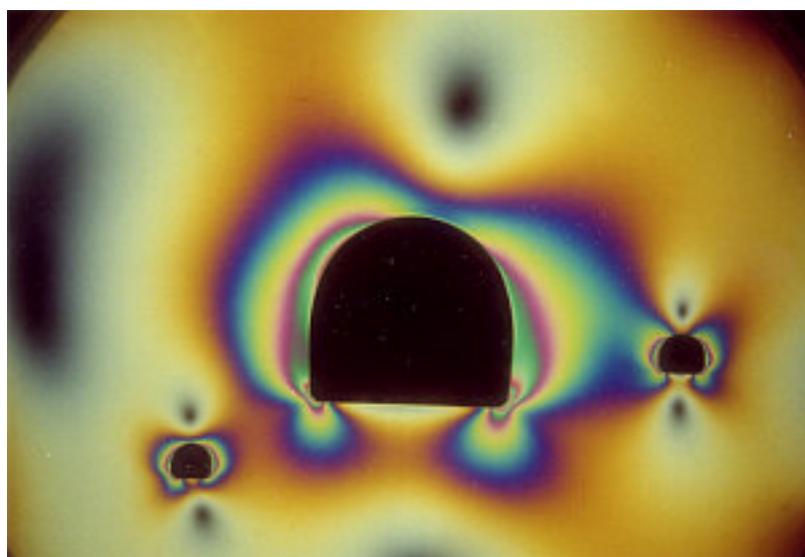
**写真 4-2**はトンネルの周辺における応力分布を観測するための画像の例である。円偏光器の特徴は



- ① 光源 水銀灯
- ② コリメータレンズ
- ③ 偏光板
- ④ 1/4 波長板
- ⑤ スクリーン
- ⑥ 荷重台
- ⑦ レール架台

光弾性実験とは?  
 建築構造物などの応力計測・車輪・レール・動物骨格などの荷重応力計測  
 高分子材料力学の計測です。

**写真 4-1** 光弾性実験装置



**写真 4-2** 光弾性画像の例

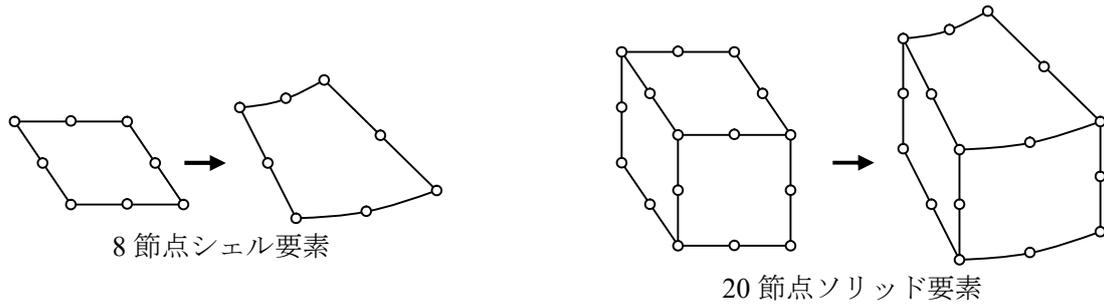


図4-1 アイソパラメトリックシェル要素とソリッド要素

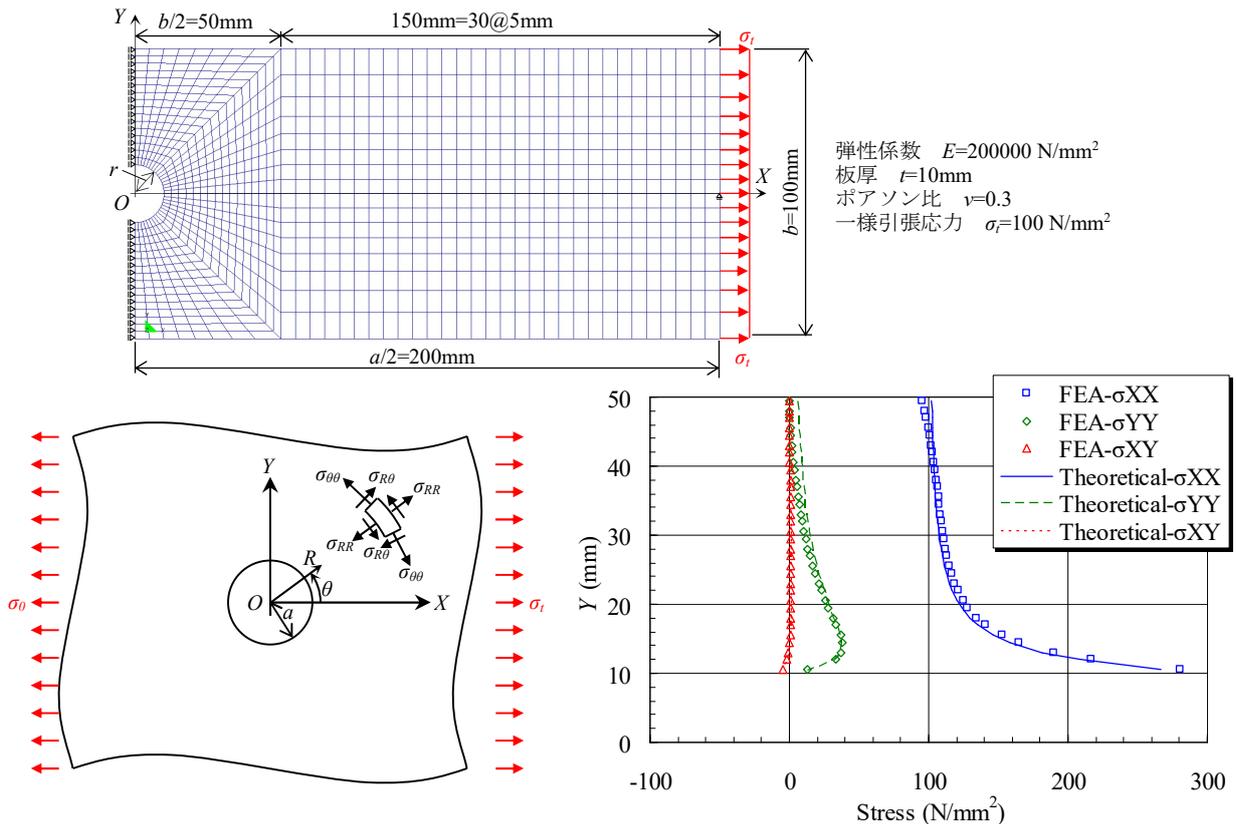


図4-2 円孔を有する有限幅の帯板の応力解析のための有限要素分割

画像に等色線のみが発現し，等傾線が出現しないことで，等色線と等傾線の区別が可能になる点にある。

(4) 有限要素法

1) 要素ライブラリー

荷重条件や境界条件の一般性を確保する解析方法としては，有限要素法や境界要素法が適っている。有限要素法において採用する要素の特性として，①局所的に急変する応力を評価できること，②合理的に要素分割を行い得て，また任意形状に対応できることが必要条件となる。このような条件を適える要素としては，平面・平板弾性問題では 8 節点アイソパラメトリックシェル要素，3 次元弾性問題では 20 節点アイソパラメトリックソリッド要素が適している。(図4-1)

2) 要素分割

局所応力問題において，応力の精度は要素分割に強く依存している。上記のセレンディピティー2 次要素による応力集中問題の数値解析例により，要素分割における注意事項を示そう。

図4-2 は円孔を有する帯板の応力集中問題を解析するための有限要素モデルである。要素分割は注意深い検討の基に行われており，一つの標準的な要素分割例と考えることができる。板幅と孔径の比は

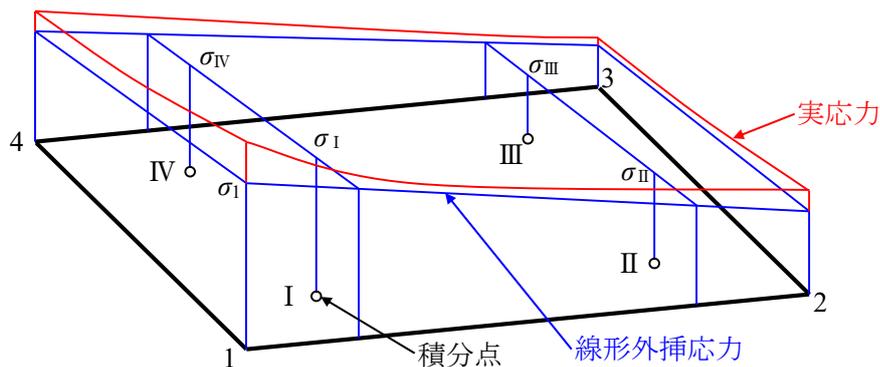


図 4-3 アイソパラメトリック要素における積分点応力から節点応力への変換

5 : 1 で, 円孔回りの応力 3 成分の分布は無限板の解析解とほぼ一致している. ただし, 一般にはアイソパラメトリック要素では応力の計算は積分点で行われるため, 最大応力が生ずる円孔の縁とは若干ずれた位置で計算上の最大応力を評価している. 最大応力が生ずる円孔の縁の最も近い積分点の応力は厳密解の 95% に留まっているが, 積分点から円孔の縁まで外挿すれば解析値はほぼ厳密解と一致している.

図 4-3 に示すように, 最大応力を生ずる節点を含む要素における 4 個の積分点 I ~ IV の応力  $\sigma_I \sim \sigma_{IV}$  を用いた節点 1 における応力の線形外挿値  $\sigma_1$  は以下の公式で与えられる. ただし, 4 つの積分点における応力の内,  $\sigma_I$  が最大と仮定している.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} + \sigma_{IV}}{4} + \frac{3\sigma_I - \sigma_{II} - 3\sigma_{III} + \sigma_{IV}}{4c} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II} + \sigma_{III} - \sigma_{IV}}{4c^2} \quad (1)$$

ここに,  $c$  は積分点の位置で,  $c = \sqrt{1/3}$ .

### 3) 特異場

鋭角的な切り欠き先端や急変断面には力学的な特異点が存在する. 弾性解析を行えば, 特異点近傍で要素分割を細かくするほど応力は増大し一定値に収束することはない. 現実的には特異点における増大する応力により材料が降伏することによって応力集中は緩和される. 弾塑性解析を行わずに, 特異点を含む構造の応力解析が必要となる場合は, 特異要素を (singular finite element) を特異点を含む領域に適用するか, 特異点を含む領域の内挿関数を用いた境界要素法を採用することになる. ただしこの場合は特異点における応力の大きさを特定することは放棄することになることを認識しておく必要がある.

## 4.2 の参考文献

- 1) Timoshenko, S. P. et. al. : Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1951.
- 2) 西田正孝 : 応力集中, 森北出版, 1973.
- 3) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, 1971.